так что

$$D\frac{dx^i}{ds} = \varkappa_1 \nu_1^i \, ds.$$

Теперь (101.10) принимает вид

$$\delta s = -\int_{s_1}^{s_2} \varkappa_1(s) \, g_{ij} \nu_1^i \delta x^j \, ds. \qquad (101.13)$$

Ввиду появления ds под знаком интеграла нам пришлось указать пределы изменения тоже для s. *Итак, вариация длины дуги кривой с закрепленными концами получается следующим образом: проекция вектора бесконечно малого смещения δx^j на первую нормаль ν_1^i умножается на первую кривизну $\varkappa_1$ и на ds, интегрируется по всей кривой, и результат берется с обратным знаком* (если ν_1^i — единичный вектор; если же он мнимоединичный, то формулировка несколько меняется).

§ 102*. Геодезически параллельные гиперповерхности

Для изучения геодезических линий в римановом пространстве V_n и самого V_n в ряде случаев приносят пользу специальные, связанные с геодезическими линиями геометрические конструкции. В частности, они позволяют строить координатные системы в V_n с наиболее простыми свойствами. Конечно, вообще говоря, в V_n нельзя построить такие простые координатные системы, какими являются, например, ортонормированные координатные системы в R_n, но частично все же можно приблизиться к их свойствам.

Выберем в V_n произвольную *неизотропную* гиперповерхность V_{n-1}:

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}), \qquad (102.1)$$

где параметры u^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$ пробегают некоторую связную область изменения Ω_u, а функции $x^i(u^\alpha)$ (по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемые в Ω_u и на ее границе) удовлетворяют условию (83.4)

$$\text{ранг матрицы} \quad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial u^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial u^{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{matrix} \right\| \quad \text{равен } n-1. \qquad (102.2)$$

В каждой точке $M \in V_{n-1}$ имеется вполне определенная неизотропная нормаль (в касательном пространстве R_n; см. § 85), единичный (или мнимоединичный) вектор которой мы обозначим η^i (рис. 19). Правда, такой вектор можно построить с точностью до умножения на -1, так что в одной точке гиперповерхности V_{n-1} мы выберем его направление произвольно, а во всех остальных — по принципу непрерывности.

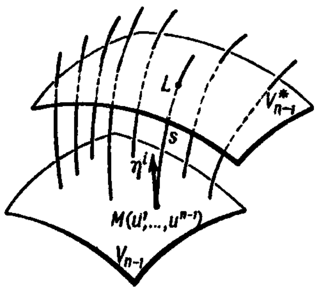

Рис. 19.

Через каждую точку M гиперповерхности V_{n-1} проведем геодезическую линию в направлении нормали, т. е. вектора η^i. Эту геодезическую мы будем называть нормальной к V_{n-1}. Отнесем ее к параметру s, если она вещественной длины, и к параметру σ, если она мнимой длины (изотропной эта геодезическая быть не может, так как касательный к ней вектор η^i неизотропный). Точку M принимаем за начальную точку отсчета $s=0$ (или $\sigma=0$). Положительное направление отсчета параметра выбираем в сторону η^i, т. е. так, чтобы в точке M касательный вектор $\frac{dx^i}{ds}$ $\left(\text{или } \frac{dx^i}{d\sigma}\right)$ совпадал с η^i (а не с $-\eta^i$). Для определенности рассматриваем в дальнейшем случай вещественной длины.

Если мы зададимся определенными значениями параметров u^α из области Ω_u и определенным значением s, не слишком большим по модулю, то этим определится некоторая точка L в нашем римановом пространстве, а именно, параметры $\tilde{u}^\alpha$ определяют точку M на V_{n-1}, а значение s — определенную точку L на нормальной геодезической, проведенной через M, так что

$$\breve{ML}=s.$$

В частности, при $s=0$ мы попадаем в точку M на V_{n-1}. При переменном s и постоянных u^α мы, очевидно, движемся по нормальной к V_{n-1} геодезической. Поскольку точка L однозначно определяется значениями u^α, s, ее координаты x^i являются однозначными функциями этих переменных:

$$x^i=x^i(u^1,\ \dots,\ u^{n-1},\ s), \tag{102.3}$$

где u^α пробегают область изменения Ω_u, а s — некоторый интервал изменения, включающий нуль. При этом от параметров u^α непрерывно дифференцируемым образом зависят начальные условия, определяющие геодезическую: координаты ее начальной точки M на V_{n-1} и координаты ее начального касательного вектора η^i в точке M. Из теории дифференциальных уравнений следует, что в этом случае решение дифференциальных уравнений геодезической (101.1) тоже непрерывно дифференцируемым образом зависит как от аргумента s, так и от параметров u^α.

Наша конструкция обладает одним важным свойством. *Отметим на каждой нормальной к V_{n-1} геодезической точку L так, чтобы длина дуги*

$$\smile{ML} = s$$

была во всех случаях одной и той же. Геометрическое место точек L образует, вообще говоря, поверхность, которую мы будем называть геодезически параллельной к V_{n-1} поверхностью.

Параметрические уравнения этой поверхности мы, очевидно, получим, закрепив в уравнениях (102.3) переменное s на какомлибо постоянном значении $s=a$. Это и будет значить, что каждая точка M гиперповерхности V_{n-1} сдвинута по нормальной геодезической на постоянное расстояние a (разумеется, a может иметь любой знак).

Полученное геометрическое место

$$x^i = x^i(u^1, \ \ldots, \ u^{n-1}, \ a) \tag{102.4}$$

будет, вообще говоря, гиперповерхностью, для которой однако возможны особенности и даже случаи вырождения ее в поверхность низшего числа измерений (даже в точку). Действительно, мы не можем гарантировать, что при любом значении a у нас будет соблюдаться условие (102.2); возможно, следовательно, что не все параметры u^α будут существенными, т. е. x^i смогут быть выражены через меньшее число параметров, так что поверхность (102.4) будет иметь фактически число измерений r, меньшее $n-1$ (мы будем предполагать при этом выполнение условия (83.2), где $m=r$). Однако при достаточно малых a условие (102.2) соблюдается по соображениям непрерывности (действительно, при $a=0$, т. е. на V_{n-1}, оно имеет место), и мы получаем гиперповерхность.

Мы утверждаем, что геодезические, нормальные к V_{n-1}, будут нормальными и к любой геодезически параллельной к V_{n-1} поверхности V_r^* (как при $r=n-1$, так и при $r<n-1$).

Для доказательства рассмотрим отрезок $\smile{ML}$ нормальной к V_{n-1} геодезической, конец которого M скользит по V_{n-1}, а конец L — по геодезически параллельной ей поверхности V_r^*. Длина s отрезка $\smile{ML}$ остается постоянной по построению, $s=a$. Вычислим теперь вариацию длины отрезка $\smile{ML}$ при его бесконечно малом смещении, причем мы можем пользоваться формулой (101.12), поскольку $\smile{ML}$ — отрезок геодезической:

$$\delta s = \left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_L - \left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_M. \tag{102.5}$$

Очевидно, $\delta s = 0$, так как s остается постоянной. Далее, $\left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_M$ выражает скалярное произведение вектора $\frac{dx^i}{ds}$, касательного к $\breve{ML}$ в начальной точке M, на вектор δx^j бесконечно малого смещения точки M по V_{n-1}. Так как $\frac{dx^i}{ds} = \eta^i$ вектор, нормальный к V_{n-1}, а δx^j — вектор, касательный к V_{n-1}, то это скалярное произведение равно нулю.

Теперь равенство (102.5) принимает вид

$$\left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right]_L = 0, \tag{102.6}$$

т. е. равно нулю скалярное произведение вектора $\frac{dx^i}{ds}$, касательного к $\breve{ML}$ в точке L, на вектор δx^j бесконечно малого смещения точки L по поверхности V_r^*. Так как, варьируя отрезок $\breve{ML}$, мы можем произвольно двигать его конец L по поверхности V_r^*, то δx^j — *произвольный* касательный к этой поверхности вектор в точке L. Отсюда следует, что *вектор* $\frac{dx^i}{ds}$, *касательный к геодезической* $\breve{ML}$ *в точке* L, *направлен по нормали к поверхности* V_r^*. Этим наше утверждение доказано.

Чтобы не загромождать доказательства, мы не вводили явно параметра α, по которому берется вариация, и не строили явно семейства кривых, включающих отрезок $\breve{ML}$, или, вернее, выполнили это построение в виде наглядной картины «движения» отрезка.

Ясно, что наше доказательство без всяких затруднений можно повторить в формально безупречных терминах.

Полученный результат лишает исходную гиперповерхность V_{n-1} ее особой роли. В самом деле, рассмотрим геодезически параллельную ей гиперповерхность V_{n-1}^* $(r = n-1)$. Нормальные к V_{n-1}^* геодезические будут те же самые, что и для V_{n-1}. При этом, так как они неизотропные, ортогональная к ним гиперповерхность V_{n-1}^* будет тоже неизотропной.

В результате геодезический параллелизм (неизотропных) гиперповерхностей V_{n-1}, V_{n-1}^* *означает, что между ними сохраняется постоянное расстояние по общим нормальным геодезическим.* Отсюда ясно, что всякая поверхность, геодезически параллельная V_{n-1}, будет геодезически параллельна и V_{n-1}^*, и обратно. Поэтому V_{n-1} и V_{n-1}^* порождают одно и то же семейство геодезически параллельных поверхностей, так что за исходную поверхность можно принять V_{n-1}^* вместо V_{n-1}. Более детальное рассмотрение показало бы, что за исходную поверхность можно принять неизотропную поверхность V_r^*, геодезически параллельную V_{n-1}, и в том случае, когда ее число измерений $r < n-1$.

Дело в том, что хотя положение точки на V_r^* зависит лишь от r параметров, но нормальная плоскость к V_r^* будет зато не одномерной, а $n-r$-мерной, так что в каждой точке нормальное направление зависит от $n-r-1$ параметра. В результате, проводя геодезическую линию через каждую точку $M^* \in V_r^*$ по каждому нормальному направлению (по крайней мере, внутри некоторого конуса в нормальной плоскости), мы снова получаем семейство геодезических от $n-1$ параметров; откладывая на них отрезки одинаковой длины $s=a$, мы получаем геодезически параллельные гиперповерхности, те же самые, что и порожденные гиперповерхностью V_{n-1}.

Итак, мы пришли к следующему результату:

Всякая неизотропная гиперповерхность V_{n-1} включается и притом единственным образом в однопараметрическое семейство геодезически параллельных гиперповерхностей. Эти гиперповерхности (тоже неизотропные) обладают общими нормальными геодезическими и взятые попарно высекают на этих геодезических отрезки постоянной длины. При отдельных значениях параметра гиперповерхность семейства может вырождаться в поверхность меньшего числа измерений (более трудные случаи появления особенностей мы исключаем).

В частности, в обычном пространстве всякая поверхность включается в однопараметрическое семейство «параллельных» ей поверхностей, обладающих общими с ней нормалями и попарно отстоящих друг от друга на постоянном расстоянии, если измерять это расстояние по общим нормалям.

В качестве примера рассмотрим в обычном пространстве *семейство круглых цилиндров с общей осью*. Эти поверхности («гиперповерхности» с точки зрения обычного пространства) образуют семейство от одного параметра и обладают общими нормальными геодезическими.

Действительно, всевозможные перпендикуляры, восстановленные к оси во всевозможных ее точках, служат общими нормалями ко всем цилиндрам семейства. Отрезки общих нормалей между двумя цилиндрами остаются по длине постоянными. Строя поверхности, геодезически параллельные данному цилиндру семейства, мы всегда будем получать другие цилиндры семейства, с одним лишь исключением: если по внутренним нормалям к цилиндру откладывать постоянный отрезок, равный радиусу его основания, то геодезически параллельная поверхность вырождается в линию — в ось цилиндра. Аналогичные явления возможны, конечно, и в многомерном случае (поверхность V_r^*).

Мы уже указывали коротко, как восстановить семейство геодезически параллельных гиперповерхностей не только по любой его гиперповерхности V^*_{n-1}, но и в случае ее вырождения в поверхность V^*_r меньшего числа измерений. Совершенно таким же образом можно и заново построить семейство геодезически параллельных гиперповерхностей, задавшись некоторой неизотропной поверхностью V_r, которая должна будет войти в это семейство в качестве вырожденной гиперповерхности. Мы рассмотрим эту задачу в важном частном случае, *когда заданная поверхность будет нулевого измерения и представляет собой просто точку* V_0.

В этом случае любое направление, исходящее из точки V_0, будет нормальным по отношению к «поверхности» V_0. Поэтому геодезические мы будем проводить через V_0 по всевозможным направлениям за исключением, однако, изотропных направлений. При этом нужно рассматривать отдельно геодезические вещественной и мнимой длины. Откладываем от V_0 по геодезическим вещественной длины отрезки постоянной длины $s=a$; концы этих отрезков образуют гиперповерхность, которую мы будем называть *геодезической гиперсферой радиуса* a *с центром в* V_0.

Аналогичным образом, откладывая от V_0 по геодезическим мнимой длины отрезки постоянной длины $s=ai$, мы получаем гиперповерхность, которую будем называть *геодезической гиперсферой радиуса* ai *с центром* V_0. В случае собственного риманова пространства существуют геодезические гиперсферы лишь вещественного радиуса, которые полностью охватывают точку V_0, так что в них упираются геодезические, исходящие из V_0 по всем направлениям. В случае псевдориманова пространства геодезические гиперсферы вещественного и мнимого радиусов строятся в основных чертах сходно с гиперсферами S_{n-1} в соответствующем псевдоевклидовом пространстве R_n. Для определенности мы ограничимся в дальнейшем геодезическими гиперсферами вещественного радиуса.

Мы утверждаем, что геодезические вещественной длины, исходящие из точки V_0, *служат нормальными геодезическими для геодезических гиперсфер* V^*_{n-1} *вещественного радиуса с центром* V_0.

Нам требуется доказать, таким образом, что геодезическая, соединяющая центр V_0 гиперсферы V^*_{n-1} с произвольной ее точкой L, направлена по нормали к V^*_{n-1} в точке L. Для этого мы повторяем прежние рассуждения, а именно, вычисляем вариацию длины геодезического отрезка $\overset{\frown}{ML}$, где точка M закреплена в центре гиперсферы V_0, а L скользит по гиперсфере V^*_{n-1}. На прежних основаниях пользуемся формулой (102.5), причем

$$\delta s=0,$$

так как $s=\overset{\smile}{ML}$ остается постоянным, а

$$\left[g_{ij}\frac{dx^i}{dx}\delta x^j\right]_M=0,$$

так как $[\delta x^j]_M=0$ в силу неподвижности точки M. Снова приходим к (102.6), что и означает ортогональность геодезической $\overset{\smile}{ML}$ к гиперсфере в точке L.

Таким образом, геодезические гиперсферы вещественного радиуса с данным центром V_0 образуют однопараметрическое семейство геодезически параллельных гиперповерхностей с общими нормальными геодезическими, сходящимися в общем центре V_0. При этом центр V_0 можно рассматривать как гиперповерхность семейства, выродившуюся в точку.

Совершенно аналогичный результат справедлив, разумеется, и для семейства концентрических геодезических гиперсфер мнимого радиуса.

§ 103. Полугеодезические координатные системы

Зависимость (102.3), установленная нами в § 102, наталкивает на мысль принять переменные $u^1, \ldots, u^{n-1}, s$ за новые координаты хотя бы в той области нашего пространства, которую заполняют нормальные к V_{n-1} геодезические. Однако для этого необходимы еще некоторые оговорки. Дело в том, что эти геодезические, исходящие из разных точек V_{n-1}, могут пересекаться между собой, так что *различным* параметрам u^α, s может отвечать *одна и та же* точка L. Чтобы обеспечить *взаимную однозначность* соответствия между параметрами u^α, s и точками рассматриваемой области, ее, возможно, придется ограничить не слишком обширной окрестностью гиперповерхности V_{n-1}. В общем случае можно утверждать лишь, что в некоторой окрестности любой точки гиперповерхности V_{n-1} переменные u^α, s способны служить координатами в V_n. В самом деле, вычислим частные производные $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$, $\frac{\partial x^i}{\partial s}$ функций (102.3) в точке M на V_{n-1} (т. е. при $s=0$). В силу общих предположений (102.2) векторы $\frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, \ldots, \frac{\partial x^i}{\partial u^{n-1}}$ — направляющие векторы касательной гиперплоскости — линейно независимы между собой. Кроме того, направленный по нормали и, следовательно, ортогональный к ним единичный вектор $\eta^i=\frac{\partial x^i}{\partial s}$ также от них линейно не зависит. Следовательно, определитель, образованный координатами векторов $\frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial x^i}{\partial u^{n-1}}, \frac{\partial x^i}{\partial s}$, будет