так как $s = \smile{ML}$ остается постоянным, а

$$\left[g_{ij}\frac{dx^i}{dx}\delta x^j\right]_M = 0,$$

так как $[\delta x^j]_M = 0$ в силу неподвижности точки M. Снова приходим к (102.6), что и означает ортогональность геодезической $\smile{ML}$ к гиперсфере в точке L.

Таким образом, геодезические гиперсферы вещественного радиуса с данным центром V_0 образуют однопараметрическое семейство геодезически параллельных гиперповерхностей с общими нормальными геодезическими, сходящимися в общем центре V_0. При этом центр V_0 можно рассматривать как гиперповерхность семейства, выродившуюся в точку.

Совершенно аналогичный результат справедлив, разумеется, и для семейства концентрических геодезических гиперсфер мнимого радиуса.

§ 103. Полугеодезические координатные системы

Зависимость (102.3), установленная нами в § 102, наталкивает на мысль принять переменные $u^1, \ldots, u^{n-1}, s$ за новые координаты хотя бы в той области нашего пространства, которую заполняют нормальные к V_{n-1} геодезические. Однако для этого необходимы еще некоторые оговорки. Дело в том, что эти геодезические, исходящие из разных точек V_{n-1}, могут пересекаться между собой, так что *различным* параметрам u^α, s может отвечать *одна и та же* точка L. Чтобы обеспечить *взаимную однозначность* соответствия между параметрами u^α, s и точками рассматриваемой области, ее, возможно, придется ограничить не слишком обширной окрестностью гиперповерхности V_{n-1}. В общем случае можно утверждать лишь, что в некоторой окрестности любой точки гиперповерхности V_{n-1} переменные u^α, s способны служить координатами в V_n. В самом деле, вычислим частные производные $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$, $\frac{\partial x^i}{\partial s}$ функций (102.3) в точке M на V_{n-1} (т. е. при $s=0$). В силу общих предположений (102.2) векторы $\frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, \ldots, \frac{\partial x^i}{\partial u^{n-1}}$ — направляющие векторы касательной гиперплоскости — линейно независимы между собой. Кроме того, направленный по нормали и, следовательно, ортогональный к ним единичный вектор $\eta^i = \frac{\partial x^i}{\partial s}$ также от них линейно не зависит. Следовательно, определитель, образованный координатами векторов $\frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial x^i}{\partial u^{n-1}}, \frac{\partial x^i}{\partial s}$, будет отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \frac{\partial x^2}{\partial u^{n-1}} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial s} & \frac{\partial x^2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial s} \end{vmatrix} = \frac{\partial (x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial (u^1, \dots, u^{n-1}, s)} \neq 0. \qquad (103.1)$$

Это показывает, что зависимость (102.3) обратима, по крайней мере, в некоторой окрестности рассматриваемой точки M, так что $u^1, \dots, u^{n-1}, s$ можно выразить однозначными непрерывно дифференцируемыми функциями старых координат x^i. В результате переменные $u^1, \dots, u^{n-1}, s$, по крайней мере, в этой окрестности можно принять за новые координаты.

В дальнейшем мы перейдем к координатам $u^1, \dots, u^{n-1}, s$; *будем обозначать их просто* $x^1, \dots, x^{n-1}, x^n$. Очевидно, эти координаты обладают следующими свойствами: *координатные линии x^n суть геодезические, вдоль которых x^n служит длиной дуги (или, в случае мнимого s, параметром σ), причем эти геодезические ортогонально секут координатные гиперповерхности* $x^n = \text{const}$. Действительно, гиперповерхности $s = \text{const}$ геодезически параллельны между собой, а координатные линии x^n служат нормальными к ним геодезическими.

Координатную систему x^i с указанными свойствами мы будем называть *полугеодезической*. Полугеодезическую систему координат мы получим, в частности, следующим образом. Выберем какую-нибудь точку V_0 и рассмотрим выходящие из нее геодезические вещественной длины. Эти геодезические ортогонально пересекают геодезические гиперсферы вещественного радиуса с центром в V_0. Рассмотрим на одной из этих гиперсфер какую-нибудь область, отнесенную к параметрам $u^1, \dots, u^{n-1}$, и к этим же параметрам будем относить геодезические, соединяющие центр гиперсферы V_0 с точками рассматриваемой области. При этом мы берем геодезическую каждый раз лишь по одну сторону точки V_0, т. е. рассматриваем геодезические лучи, исходящие из точки V_0. Положение произвольной точки L на геодезическом луче мы будем характеризовать длиной дуги $s = V_0L$. Очевидно, что *тогда переменные* $u^1, \dots, u^{n-1}, s$ *образуют полугеодезическую систему координат в области, заполненной рассматриваемыми геодезическими лучами, т. е. во внутренности некоторого «геодезического гиперконуса»* (точка V_0 исключается). Впрочем, нужно еще оговорить, что все построение происходит в достаточной близости точки V_0, чтобы исходящие из V_0 геодезические лучи не могли иметь общих точек кроме V_0. Разумеется, аналогичное построение можно произвести и с геодезическими мнимой длины.

Выясним строение метрического тензора g_{ij} в произвольной полугеодезической координатной системе.

Пусть dx^i и δx^i — векторы бесконечно малых смещений из какой-либо точки L соответственно по координатной линии x^n и по гиперповерхности $x^n = \text{const}$. Тогда

$$dx^1 = \ldots = dx^{n-1} = 0; \quad \delta x^n = 0. \tag{103.2}$$

В силу ортогональности координатных линий x^n и гиперповерхностей $x^n = \text{const}$ скалярное произведение векторов dx^i, δx^i должно давать нуль:

$$g_{ij} dx^i \delta x^j = 0,$$

т. е.

$$(g_{n1}\delta x^1 + g_{n2}\delta x^2 + \ldots + g_{n,n-1}\delta x^{n-1})\, dx^n = 0.$$

Так как $dx^n \neq 0$, δx^1, δx^2, $\ldots$, δx^{n-1} произвольны, то получаем:

$$g_{n1} = g_{n2} = \ldots = g_{n,n-1} = 0. \tag{103.3}$$

Очевидно, это условие, обратно, достаточно для ортогональности координатных линий x^n гиперповерхностям $x^2 = \text{const}$.

Далее, записывая общее выражение линейного элемента

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{103.4}$$

и применяя его для бесконечно малого смещения вдоль координатной линии x^n, получаем:

$$ds^2 = g_{nn} (dx^n)^2,$$

а так как вдоль линии x^n, в случае вещественной длины, $ds = dx^n$, то окончательно

$$g_{nn} = 1. \tag{103.5}$$

Итак, в полугеодезической координатной системе координаты метрического тензора подчинены условиям (103.3), (103.5), *так что линейный элемент принимает вид*

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + dx^{n^2} \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{103.6}$$

В случае, когда координатные линии x^n — геодезические мнимой длины и x^n играет роль параметра σ вдоль них, мы приходим к тем же результатам с той лишь разницей, что условие (103.5) имеет вид $g_{nn} = -1$ и соответственно в (103.6) вместо dx^{n^2} стоит $-dx^{n^2}$.

Обратно, указанное строение линейного элемента, т. е. соблюдение условий (103.3), (103.5), *достаточно для того, чтобы данная координатная система x^i была полугеодезической.*

В самом деле, условие (103.3) означает, что координатные линии x^n ортогональны к координатным гиперповерхностям $x^n = \text{const}$, а из условия (103.5) следует, что вдоль линий x^n

$$ds^2 = g_{nn}(dx^n)^2 = dx^{n^2},$$

т. е. dx^n совпадает с дифференциалом дуги, и x^n служит длиной дуги. Остается показать, что линии x^n — геодезические. Для этого выпишем дифференциальные уравнения геодезических (101.1):

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}. \tag{103.7}$$

Подсчитаем коэффициенты связности вида Γ^k_{nn}. Пользуясь соотношением (94.8), пишем:

$$\Gamma_{l,\,nn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ln}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{ln}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{nn}}{\partial x^l}\right) = 0,$$

так как g_{ln}, g_{nn} суть константы (0 или 1). Далее, согласно (94.6)

$$\Gamma^k_{nn} = g^{kl}\Gamma_{l,\,nn} = 0. \tag{103.8}$$

Теперь нетрудно проверить, что линии x^n будут геодезическими, т. е. для этих линий удовлетворяются дифференциальные уравнения (103.7). Действительно, вдоль линий x^n мы имеем $s = x^n$ и следовательно,

$$\frac{dx^k}{ds} = \begin{cases} 0 & (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \\ 1 & (k = n), \end{cases} \tag{103.9}$$

так что $\dfrac{d^2x^k}{ds^2} = 0$. Правая же часть уравнения (103.7) в силу (103.9) принимает вид Γ^k_{nn}, а значит, тоже равна нулю. Уравнения (103.7) удовлетворяются, и наше предложение доказано. Аналогично обстоит дело и в том случае, когда линии x^n мнимой длины и условие (103.5) имеет вид $g_{nn} = -1$.

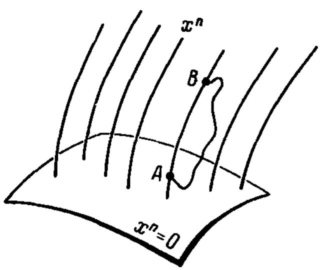

Рис. 20.

Мы установили (§ 101), что неизотропные геодезические — линии стационарной длины. *Естественно поставить вопрос, не будут ли они линиями экстремальной длины наподобие прямых в обычном пространстве, которые дают кратчайшее расстояние между двумя точками.*

Рассмотрим сначала *собственно риманово пространство, отнесенное к полугеодезической координатной системе*, так что линейный элемент имеет вид (103.6).

Так как линейный элемент ds^2 в нашем случае положительно определенный, то, в частности, он будет положительно определенным и на гиперповерхности $x^n = \text{const}$. При этом $dx^n = 0$, и мы получаем:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta > 0 \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \qquad (103.10)$$

если только dx^α не обращаются в нуль одновременно.

Покажем, что всякий отрезок AB геодезической линии x^n *короче любой другой кривой* $\breve{AB}$, *соединяющей его концы (и лежащей в той области, где определена наша полугеодезическая координатная система*; рис. 20).

Длина отрезка AB геодезической x^n равна, очевидно, $x_B^n - x_A^n$, где $x_A^n < x_B^n$ — значения координаты x^n в точках A и B.

Проведем теперь произвольную другую гладкую кривую $\breve{AB}$, соединяющую те же точки A, B. Вычислим ее длину

$$s = \int\limits_{\breve{AB}} \sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + dx^{n^2}}.$$

Интеграл берется по кривой $\breve{AB}$, причем предполагается, что она отнесена к какому-то параметру t, который нет надобности явно выписывать. В силу (103.10)

$$\sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + dx^{n^2}} \geqslant |dx^n|, \qquad (103.11)$$

причем хотя бы на отдельных участках имеет место знак $>$ (иначе $dx^\alpha \equiv 0$, и кривая $\breve{AB}$ совпадает с отрезком AB геодезической x^n). В результате

$$s > \int\limits_{\breve{AB}} |dx^n| \geqslant \left| \int\limits_{\breve{AB}} dx^n \right|.$$

Последнее неравенство написано в силу известного свойства определенных интегралов. Так как

$$\int\limits_{\breve{AB}} dx^n = x_B^n - x_A^n > 0,$$

то окончательно получаем:

$$s > x_B^n - x_A^n, \qquad (103.12)$$

что мы и хотели показать.

Таким образом, отрезок геодезической AB действительно дает кратчайшее расстояние между точками A, B по сравнению с кривыми $\breve{AB}$, лежащими в некоторой окружающей его области, *если только его можно включить в координатную линию* x^n *полугеодезической координатной системы*. А между тем это не всегда можно сделать. Действительно, пусть геодезический отрезок AB нам задан. Чтобы построить полугеодезическую координатную систему, в которой данный отрезок принадлежал бы координатной линии x^n, естественно поступить так. Проводим какую-нибудь гиперповерхность V_{n-1} через точку A ортогонально к геодезической AB. Разумеется, условие ортогональности определяет лишь касательную гиперплоскость к V_{n-1} в точке A; в остальном V_{n-1} проводится произвольно. Примем гиперповерхность V_{n-1} за исходную для построения полугеодезической координатной системы $x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n = u^1, \ldots, u^{n-1}, s$; нормальная к V_{n-1} геодезическая AB включится в число координатных линий x^n. Однако, как мы знаем, *переменные* $u^1, \ldots, u^{n-1}$, s *наверняка дают полугеодезическую координатную систему лишь в некоторой окрестности точки* A; при дальнейшем продолжении нормальных к V_{n-1} геодезических они, возможно, начинают пересекаться и тем самым становятся неспособными служить координатными линиями x^n. Поэтому мы не можем утверждать, что обязательно весь отрезок AB включается в координатную линию x^n нашей полугеодезической системы; это можно утверждать лишь для некоторого отрезка AB', составляющего часть отрезка AB. Тем самым, *не всякий вообще отрезок геодезической дает кратчайшее расстояние между своими концами хотя бы в некоторой окружающей его области*; *но всякий отрезок геодезической, отложенный от произвольно взятой ее точки A и не слишком большой по длине, этим свойством обладает*. Для более точной оценки тех пределов, в которых можно менять длину этого отрезка, необходимо было бы прибегнуть к более тонким методам вариационного исчисления.

Простым примером может служить двумерная собственно риманова геометрия на обычной сфере. Геодезическими являются окружности больших кругов, причем дуга AB, меньшая полуокружности, дает кратчайшее расстояние между точками A, B на сфере; дуга же AB, бóльшая полуокружности, не дает кратчайшего расстояния даже в сколь угодно узкой окружающей ее области на сфере.

Положение вещей сильно меняется *в случае псевдориманова пространства*. Будем для определенности рассматривать геодезические вещественной длины и сравнивать их с линиями тоже только вещественной длины. Прежде всего в псевдоримановом пространстве будет неверным соотношение (103.10), а следовательно, падает и весь вывод, приводящий к (103.12). Так как теперь $g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ может быть, вообще говоря, и отрицательным и положительным, то длина s кривой $\overset{\frown}{AB}$ может быть и больше и меньше длины геодезического отрезка AB. Геодезические линии даже в малых кусках теряют свои экстремальные свойства и остаются лишь линиями стационарной длины. Исключением является случай, когда линейный элемент на гиперповерхностях $x^n = \text{const}$ будет *отрица-*

тельно определенным:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta < 0. \tag{103.13}$$

Рассмотрим этот случай подробнее.

Так как геодезические линии x^n по нашему предположению имеют вещественную длину и вдоль них $ds^2 > 0$, то речь идет, очевидно, о псевдоримановом пространстве индекса $n-1$. В этом случае, сравнивая отрезок AB геодезической линии x^n с гладкой кривой $\overset{\smile}{AB}$ тоже вещественной длины, получаем вместо (103.11)

$$\sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + dx^{n^2}} \leqslant |dx^n|. \tag{103.14}$$

При движении по $\overset{\smile}{AB}$ от точки A к точке B все время

$$dx^n > 0.$$

Действительно, так как $x^n_B > x^n_A$, то dx^n не может все время оставаться отрицательным; если допустить для dx^n отрицательные значения, то, переходя от них к положительным значениям, dx^n принимал бы значение нуль в силу гладкости кривой $\overset{\smile}{AB}$.

В этих точках мы имели бы согласно (103.6)

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta < 0$$

вопреки предположению о вещественной длине кривой $\overset{\smile}{AB}$ *). Итак, $dx^n > 0$, и (103.13) можно переписать в виде

$$\sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + dx^{n^2}} \leqslant dx^n.$$

Интегрируя это неравенство по кривой $\overset{\smile}{AB}$ и учитывая, что, по крайней мере, на некоторых участках неравенство является строгим, мы получаем:

$$s < x^n_B - x^n_A. \tag{103.15}$$

Следовательно, в псевдоримановом пространстве индекса $n-1$ отрезок AB геодезической вещественной длины дает длиннейшее расстояние между точками A, B, предполагая, что этот отрезок можно включить в координатную линию x^n полугеодезической координатной системы и что для сравнения берутся гладкие кривые $\overset{\smile}{AB}$ вещественной длины из области, где определена эта координатная система.

Как и раньше, включение AB в координатную линию x^n можно гарантировать лишь для не слишком больших AB.

---

*) Строго говоря, эти рассуждения следовало бы вести не с dx^n, а с производной $\frac{dx^n}{dt}$, где t — параметр, монотонно растущий вдоль кривой $\overset{\smile}{AB}$, причем $\frac{dx^i}{dt}$ одновременно в нуль не обращаются.

В случае псевдоевклидова пространства R_n индекса $n-1$ эта оговорка отпадает: всякую прямую вещественной длины можно принять за ось x^n ортонормированной координатной системы x^1, x^2, ..., x^{n-1}, x^n, в которой скалярный квадрат вектора имеет вид

$$\mathbf{x}^2 = -x^{1^2} - \ldots - x^{n-1^2} + x^{n^2}.$$

Поэтому любой прямолинейный отрезок AB вещественной длины будет служить длиннейшим расстоянием между точками A и B, если для сравнения брать гладкие кривые $\breve{AB}$ тоже вещественной длины.

Совершенно аналогичным образом в R_n индекса 1 прямолинейный отрезок AB мнимой длины будет служить длиннейшим расстоянием между точками A и B по сравнению со всевозможными гладкими кривыми $\breve{AB}$ тоже мнимой длины.

§ 104*. Динамика системы в обычном пространстве как динамика точки в римановом пространстве

В этом параграфе мы рассмотрим сначала *динамику точки в собственно римановом пространстве* V_n, а затем покажем, как истолковать в этом смысле обычную динамику системы.

Мы будем рассматривать в V_n подвижную точку M, обладающую массой единица и находящуюся под действием силового поля

$$f^k = f^k(x^1, \ldots, x^n; t). \tag{104.1}$$

Здесь f^k — вектор, заданный в каждой точке и в каждый момент времени t и выражающий силу, действующую на M, если M попадает в эту точку в этот момент времени.

Все понятия механики в римановом пространстве мы будем трактовать по аналогии с механикой в обычном пространстве. Пусть закон движения точки M задается уравнениями

$$x^i = x^i(t),$$

где t — время. Естественно принять вектор

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$$

за вектор скорости, а вектор $\frac{D\dot{x}^i}{dt}$ — за вектор ускорения точки M. Тогда дифференциальные уравнения движения точки M будут:

$$\frac{D\dot{x}^k}{dt} = f^k, \tag{104.2}$$

или в развернутом виде

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = f^k(x^1, \ldots, x^n; t). \tag{104.3}$$