В случае псевдоевклидова пространства R_n индекса $n-1$ эта оговорка отпадает: всякую прямую вещественной длины можно принять за ось x^n ортонормированной координатной системы x^1, x^2, ..., x^{n-1}, x^n, в которой скалярный квадрат вектора имеет вид

$$\mathbf{x}^2 = -x^{1^2} - \ldots - x^{n-1^2} + x^{n^2}.$$

Поэтому любой прямолинейный отрезок AB вещественной длины будет служить длиннейшим расстоянием между точками A и B, если для сравнения брать гладкие кривые $\overset{\smile}{AB}$ тоже вещественной длины.

Совершенно аналогичным образом в R_n индекса 1 прямолинейный отрезок AB мнимой длины будет служить длиннейшим расстоянием между точками A и B по сравнению со всевозможными гладкими кривыми $\overset{\smile}{AB}$ тоже мнимой длины.

§ 104*. Динамика системы в обычном пространстве как динамика точки в римановом пространстве

В этом параграфе мы рассмотрим сначала *динамику точки в собственно римановом пространстве* V_n, а затем покажем, как истолковать в этом смысле обычную динамику системы.

Мы будем рассматривать в V_n подвижную точку M, обладающую массой единица и находящуюся под действием силового поля

$$f^k = f^k(x^1, \ldots, x^n; t). \tag{104.1}$$

Здесь f^k — вектор, заданный в каждой точке и в каждый момент времени t и выражающий силу, действующую на M, если M попадает в эту точку в этот момент времени.

Все понятия механики в римановом пространстве мы будем трактовать по аналогии с механикой в обычном пространстве. Пусть закон движения точки M задается уравнениями

$$x^i = x^i(t),$$

где t — время. Естественно принять вектор

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$$

за вектор скорости, а вектор $\frac{D\dot{x}^i}{dt}$ — за вектор ускорения точки M. Тогда дифференциальные уравнения движения точки M будут:

$$\frac{D\dot{x}^k}{dt} = f^k, \tag{104.2}$$

или в развернутом виде

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = f^k(x^1, \ldots, x^n; t). \tag{104.3}$$

Если $f^k \equiv 0$, т. е. движение совершается по инерции, мы получаем дифференциальные уравнения геодезических линий, которые и служат в этом случае траекториями движения; при этом время t играет роль канонического параметра. Для дальнейшего будет полезно перейти к другой форме этих дифференциальных уравнений, а именно, опуская индекс k (как обычно, при помощи метрического тензора g_{ij}) в уравнении (104.2), получаем:

$$\frac{D\dot{x}_i}{dt} = f_i,$$

где $\dot{x}_i = g_{ij}\dot{x}^j$, $f_i = g_{ij}f^j$ — ковариантные координаты векторов скорости и силы. В развернутом виде

$$\frac{d\dot{x}_i}{dt} - \Gamma^p_{ki}\dot{x}_p \frac{dx^k}{dt} = f_i.$$

Заменяя здесь $\frac{dx^k}{dt}$ через $\dot{x}^k$ и $\dot{x}_p$ через $g_{pl}\dot{x}^l$, получаем:

$$\frac{d\dot{x}_i}{dt} - \Gamma_{l,\,ki}\dot{x}^l\dot{x}^k = f_i, \tag{104.4}$$

где, как обычно,

$$\Gamma_{l,ki} = g_{pl}\Gamma^p_{ki}.$$

Вспоминая выражение для $\Gamma_{l,\,ki}$

$$\Gamma_{l,ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l}\right),$$

свертывая его с $\dot{x}^l\dot{x}^k$, получаем $\frac{1}{2}\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i}\dot{x}^l\dot{x}^k$, так как второй и третий члены взаимно уничтожаются. Теперь (104.4) можно переписать в виде

$$\frac{d\dot{x}_i}{dt} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i}\dot{x}^l\dot{x}^k = f_i. \tag{104.5}$$

За кинетическую энергию T точки M естественно принять произведение массы (которая равна единице) на половину квадрата скорости; при этом квадрат скорости можно подсчитать как скалярный квадрат вектора $\dot{x}^i$. Получаем:

$$T = \frac{1}{2} g_{lk}(x^1, \ldots, x^n)\,\dot{x}^l\dot{x}^k. \tag{104.6}$$

Рассматривая T как функцию $2n$ переменных, именно, x^i, $\dot{x}^i$, вычислим частные производные:

$$\frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i}\dot{x}^l\dot{x}^k, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} = g_{ik}\dot{x}^k = \dot{x}_i.$$

В последнем случае дифференцируем по $\dot{x}^i$ сначала множитель $\dot{x}^l$, затем $\dot{x}^k$, причем оба раза получается одно и то же выражение. В результате (104.5) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^i}=f_i. \tag{104.7}$$

Рассмотрим теперь механическую систему в обычном пространстве со склерономными и голономными связями. Это значит, что связи, во-первых, не зависят от времени и, во-вторых, носят конечный (не дифференциальный) характер. В таком случае кинетическая энергия системы T, записанная в обобщенных координатах q^i $(i=1, 2, \ldots, n)$, имеет вид положительно определенной квадратичной формы относительно $\dot{q}^i$ с коэффициентами, зависящими от q^i:

$$T=\frac{1}{2}a_{ik}(q^1, \ldots, q^n)\dot{q}^i\dot{q}^k. \tag{104.8}$$

Запишем дифференциальные уравнения движения системы (*уравнения Лагранжа 2-го рода*):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^i}=Q_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{104.9}$$

Здесь $Q_i(q^1, \ldots, q^n; t)$ — обобщенные силы соответственно по координатам q^i.

Рассмотрим n-мерное многообразие положений механической системы, отнесенное к координатам q^i. Превратим это многообразие в собственно риманово пространство V_n, вводя в нем линейный элемент

$$ds^2=a_{ij}(q^1, \ldots, q^n)\,dq^i\,dq^j \tag{104.10}$$

с коэффициентами, заимствованными из выражения кинетической энергии. Из механического смысла этой квадратичной формы, именно, $ds^2=2T\,dt^2$, вытекает ее инвариантный характер (относительно преобразования обобщенных координат q^i). Метрический тензор имеет вид $g_{ij}=a_{ij}$. Движение системы можно теперь истолковать как движение точки M единичной массы в римановом пространстве V_n. Уравнения движения системы (104.9) мы истолкуем тогда как уравнения движения точки (104.7), причем обобщенные силы Q_i будут играть роль ковариантных координат f_i той силы, которая действует на точку M.

Допустим теперь, что на нашу систему наложены кроме голономных и *неголономные связи* вида

$$\overset{(k)}{b}_1 dq^1+\ldots+\overset{(k)}{b}_n dq^n=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, p), \tag{104.11}$$

где $\overset{(k)}{b}_i$ — функции от $q^1, \ldots, q^n$. Эти p уравнений предполагаются линейно независимыми.

С точки зрения риманова пространства V_n уравнения (104.11) означают следующее. В каждой точке q^i задается проходящая через нее $n-p$-мерная плоскость касательного пространства, векторы которой ξ^i удовлетворяют уравнениям

$$\overset{(k)}{b}_i \xi^i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{104.12}$$

где $\overset{(1)}{b}_i, \ldots, \overset{(p)}{b}_i$ — ковариантные тензоры.

Как видно из (104.11), допустимыми являются лишь те движения точки M, при которых вектор скорости $\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$ в каждой точке траектории принадлежит плоскости (104.12). Эту плоскость мы будем называть допустимой, а ее векторы ξ^i — допустимыми.

Однако лишь кинематическая формулировка не исчерпывает значения неголономных связей (как, впрочем, и голономных). *Точный механический смысл связей* (104.11) *заключается в появлении при каждом движении точки M силы реакции, ортогональной к допустимой плоскости и подобранной так, чтобы обеспечить допустимый характер движения.*

Обозначим ковариантные координаты силы реакции через φ_i. Для того чтобы она была ортогональна ко всем векторам ξ^i допустимой плоскости, необходимо и достаточно, чтобы тензор φ_i представлял собой линейную комбинацию тензоров $\overset{(k)}{b}_i$:

$$\varphi_i = \lambda_1 \overset{(1)}{b}_i + \ldots + \lambda_p \overset{(p)}{b}_i. \tag{104.13}$$

Здесь $\overset{(k)}{b}_i$ — известные нам функции точки, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — неизвестные функции времени t, подлежащие определению особо для каждого движения точки M.

Теперь движение точки M мы ищем следующим образом. Неизвестными функциями от t являются $q^1, \ldots, q^n$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Дифференциальные уравнения движения (104.9) ввиду появления силы реакции примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i + \lambda_1 \overset{(1)}{b}_i + \ldots + \lambda_p \overset{(p)}{b}_i, \tag{104.14}$$

причем сюда нужно присоединить вследствие (104.11) еще уравнения

$$\overset{(k)}{b}_i \dot{q}^i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \tag{104.15}$$

Всего мы имеем $n+p$ дифференциальных уравнений для определения $n+p$ неизвестных функций от t. При этом $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ входят конечным образом и могут быть исключены из наших уравнений путем свертывания (104.14) поочередно с $n-p$ линейно независимыми допустимыми векторами

$$\xi^i_{(1)},\ \xi^i_{(2)},\ \ldots,\ \xi^i_{(n-p)}.$$

Окончательно мы получим $n-p$ дифференциальных уравнений 2-го порядка и p уравнений 1-го порядка (104.15) относительно неизвестных функций $q^i(t)$. Эта система будет иметь одно и только одно решение, если как-либо задаться в начальный момент $t=t_0$ точкой $(q^i)_0$ и вектором скорости $\left(\frac{dq^i}{dt}\right)_0$, лежащим в допустимой плоскости.

Механику системы можно связать с римановой геометрией и существенно иным образом — через принцип наименьшего действия.

Будем рассматривать на этот раз систему не только склерономную и голономную, но и консервативную, т. е. обладающую потенциалом сил $U(q^1,\ \ldots,\ q^n)$, так что

$$Q_i=\frac{\partial U}{\partial q^i}.$$

Полная энергия $E=T-U$ при действительном движении такой системы остается постоянной. Мы будем рассматривать движения системы лишь с фиксированным значением энергии E:

$$E=\text{const}.$$

Введем в n-мерном многообразии положений системы риманову метрику иначе, чем раньше, а именно, положим:

$$ds^2=2(U+E)a_{ij}\,dp^i\,dq^j, \tag{104.16}$$

где $a_{ij}(q^1,\ \ldots,\ q^n)$ имеют прежний смысл. Траектория всякого движения системы изображается кривой в этом римановом пространстве. Пусть движение началось с положения A и кончилось положением B. Тогда соответствующая кривая начинается в точке A и кончается точкой B. Длина этой кривой имеет вид

$$\int\limits_{\smile AB} ds=\int\limits_{\smile AB}\sqrt{2(U+E)}\sqrt{a_{ij}\,dq^i\,dq^j}.$$

Согласно принципу наименьшего действия в форме Якоби траектория действительного движения системы между положениями A *и B дает стационарное значение этого интеграла, т. е. геодезическую линию в римановом пространстве. Итак, траектории действительных движений системы с фиксированным значением энергии изображаются геодезическими линиями в римановом пространстве с метрикой* (104.16).