ГЛАВА IX

ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ

До сих пор мы занимались римановым пространством V_n и пространством аффинной связности L_n, в сущности, лишь в той мере, в какой первое из них напоминало евклидово пространство R_n, а второе — аффинное пространство A_n. Мы по мере возможности переносили свойства этих простых пространств в более общие и сложные пространства V_n и L_n.

Теперь нам предстоит рассмотреть теорию кривизны пространств V_n и L_n, причем под кривизной мы здесь понимаем, грубо говоря, уклонение геометрии этих пространств от геометрии их прообразов, R_n и A_n (правда, в случае L_n с кручением уклонение от геометрии в A_n выражается также и кручением). Это уклонение мы будем оценивать в бесконечно малой окрестности произвольной точки M, где оно, как мы увидим, будет выражаться в главной своей части определенным четырехвалентным тензором, заданным в точке M, — *тензором кривизны* (*тензором Римана — Христоффеля*). Поэтому во всем дальнейшем тензор кривизны будет играть у нас основную роль.

§ 105. Тензор кривизны в L_n

Мы начнем с построения тензора кривизны в L_n, затем рассмотрим его в частном случае L_n^0 (L_n без кручения) и затем в еще более частном случае V_n. При переходе от L_n к L_n^0 и от L_n^0 к V_n тензор кривизны обогащается каждый раз новыми важными свойствами, которые требуют особого рассмотрения.

К тензору кривизны в L_n мы придем сначала в результате некоторых формальных выкладок, а геометрический его смысл покажем позже.

Пусть в L_n дано одноковариантное тензорное поле

$$u_i = u_i(x^1, \ldots, x^n). \tag{105.1}$$

Вычислим абсолютный дифференциал Du_i тензора u_i при бесконечно малом смещении из данной точки M в каком-либо направлении; от этого дифференциала, который снова представляет собой одноковариантный тензор в точке M, вычислим абсолютный дифференциал $\tilde{D}$ при бесконечно малом смещении из точки M в какой-нибудь *другом* направлении (знак $\sim$ отмечает, что направление смещения теперь другое). Получим тензор $\tilde{D}Du_i$. С другой стороны, вычислим тензор $D\tilde{D}u_i$, отличающийся от предыдущего лишь порядком абсолютных дифференцирований. Как оказывается, эти тензоры будут, вообще говоря, различны; мы хотим уяснить себе, какова будет их разность.

Прежде всего нужно уточнить постановку вопроса, так как, строго говоря, неясно, что значит взять дифференциал $\tilde{D}$ от дифференциала Du_i. Мы это уточним следующим образом.

Рассмотрим в L_n двумерную поверхность $\mathfrak{M}_2$:

$$x^i = x^i(\alpha, \beta), \tag{105.2}$$

отнесенную к параметрам α, β. Впрочем, здесь не возбраняется и вырождение поверхности $\mathfrak{M}_2$ в линию или даже точку. Мы имеем в виду, следовательно, просто совокупность точек, определяемых уравнениями (105.2), без каких-либо условий (кроме того, что функции $x^i(\alpha, \beta)$ дважды непрерывно дифференцируемы).

Всегда можно выбрать поверхность $\mathfrak{M}_2$ так, чтобы она проходила через данную точку M, а ее координатные линии α и β шли по наперед заданным направлениям в точке M.

Пусть D, $\tilde{D}$ — символы абсолютных дифференциалов, вычисленных в произвольной точке $\mathfrak{M}_2$ при бесконечно малых смещениях по координатным линиям соответственно α, β и пусть d, $\tilde{d}$ — символы обыкновенных частных дифференциалов по α и β. Тогда

$$\left.\begin{aligned} Du_i &= du_i - \Gamma^p_{ki} u_p\, dx^k, \\ \tilde{D}u_i &= \tilde{d}u_i - \Gamma^p_{ki} u_p\, \tilde{d}x^k. \end{aligned}\right\} \tag{105.3}$$

Заметим, что, оставаясь на поверхности $\mathfrak{M}_2$, мы можем считать функциями от α, β не только текущие координаты $x^i(\alpha, \beta)$, но и зависящие от них координаты тензора u_i. Формулы (105.3) можно переписать, явно выражая участвующие в них частные дифференциалы:

$$\left.\begin{aligned} Du_i &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha} - \Gamma^p_{ki} u_p \frac{\partial x^k}{\partial \alpha}\right) d\alpha, \\ \tilde{D}u_i &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial \beta} - \Gamma^p_{ki} u_p \frac{\partial x^k}{\partial \beta}\right) d\beta. \end{aligned}\right\} \tag{105.4}$$

Теперь ясно, что мы вправе рассматривать Du_i, $\tilde{D}u_i$ как функции от α, β, т. е. как тензорные поля на поверхности $\mathfrak{M}_2$, а значит, можем по обычным формулам вычислять от них абсолютные дифференциалы при бесконечно малых смещениях по $\mathfrak{M}_2$. При этом мы рассматриваем $d\alpha$ и $d\beta$ как постоянные множители (точнее, как величины, не зависящие от α и β). Вычислим теперь фактически $\tilde{D}Du_i$. Для краткости записи мы будем пользоваться формулами (105.3), не упуская, однако, из виду их точный смысл (105.4). Вставляя во вторую формулу (105.3) Du_i вместо u_i, получим:

$$\tilde{D}Du_i = \tilde{d}(Du_i) - \Gamma^p_{ki}\, Du_p\, \tilde{d}x^k.$$

Теперь вместо Du_i вставим его выражение из первой формулы (105.3):

$$\begin{aligned}\tilde{D}Du_i &= \tilde{d}(du_i - \Gamma^p_{ki}u_p\,dx^k) - \Gamma^p_{ki}(du_p - \Gamma^q_{lp}u_q\,dx^l)\,\tilde{d}x^k = \\ &= \tilde{d}\,du_i - \tilde{d}\Gamma^p_{ki}\cdot u_p\,dx^k - \Gamma^p_{ki}\,\tilde{d}u_p\,dx^k - \Gamma^p_{ki}u_p\tilde{d}\,dx^k - \\ &\qquad - \Gamma^p_{ki}\,du_p\,\tilde{d}x^k + \Gamma^p_{ki}\Gamma^q_{lp}u_q\,dx^l\,\tilde{d}x^k. \qquad (105.5)\end{aligned}$$

При вычислении $D\tilde{D}u_i$ мы получим тот же результат с той лишь разницей, что символы d и $\tilde{d}$ в окончательном выражении поменяются местами. При этом первый и четвертый члены не изменятся, так как результат частных дифференцирований d и $\tilde{d}$ не зависит от их порядка. Кроме того, третий и пятый члены поменяются лишь местами, и сумма их останется прежней. Следовательно, при вычитании $D\tilde{D}u_i$ из $\tilde{D}Du_i$ перечисленные члены уничтожаются, и мы должны выписать лишь второй и шестой члены выражения (105.5), затем переставить в них символы d и $\tilde{d}$ и результат вычесть. Получим (изменяя во втором члене обозначение индекса суммирования p на q):

$$\begin{aligned}\tilde{D}Du_i - D\tilde{D}u_i &= -\tilde{d}\Gamma^q_{ki}u_q\,dx^k + \Gamma^p_{ki}\Gamma^q_{lp}u_q\,dx^l\,\tilde{d}x^k + \\ &\qquad + d\Gamma^q_{ki}u_q\,\tilde{d}x^k - \Gamma^p_{ki}\Gamma^q_{lp}u_q\,\tilde{d}x^l\,dx^k. \qquad (105.6)\end{aligned}$$

Учитывая, что Γ^q_{kl} — функция от $x^1, \ldots, x^n$, можно записать:

$$d\Gamma^q_{ki} = \frac{\partial\Gamma^q_{ki}}{\partial x^l}\,dx^l, \qquad \tilde{d}\Gamma^q_{ki} = \frac{\partial\Gamma^q_{ki}}{\partial x^l}\,\tilde{d}x^l.$$

Вставляя эти выражения в (105.6) и поменяв местами обозначения индексов суммирования k и l во втором и третьем членах правой части, получаем:

$$\begin{aligned}&\tilde{D}Du_i - D\tilde{D}u_i = \\ &\quad = \left(-\frac{\partial\Gamma^q_{ki}}{\partial x^l} + \Gamma^p_{li}\Gamma^q_{kp} + \frac{\partial\Gamma^q_{li}}{\partial x^k} - \Gamma^p_{ki}\Gamma^q_{lp}\right) u_q\,\tilde{d}x^l\,dx^k. \qquad (105.7)\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$R_{ik,l.}{}^{q}=\frac{\partial\Gamma^{q}_{li}}{\partial x^{k}}+\Gamma^{q}_{kp}\Gamma^{p}_{li}-\frac{\partial\Gamma^{q}_{ki}}{\partial x^{l}}-\Gamma^{q}_{lp}\Gamma^{p}_{ki}. \qquad (105.8)$$

Тогда (105.6) примет вид

$$\tilde{D}Du_i-D\tilde{D}u_i=R_{ik,i}{}^{q}u_q\,\tilde{d}x^l\,dx^k. \qquad (105.9)$$

Формулы (105.8), (105.9) являются окончательными, и мы должны в них разобраться. Левую часть (105.9) можно назвать *альтернированным вторым абсолютным дифференциалом тензора* u_i *для бесконечно малых смещений* dx^i, $\tilde{d}x^i$. Действительно, при рассматриваемом нами бесконечно малом смещении $d\alpha$ по координатной линии α (или $d\beta$ по координатной линии β) дифференциалы координат точки равны dx^i (или соответственно $\tilde{d}x^i$). Мы видим из (105.9), что этот *альтернированный второй абсолютный дифференциал тензора* u_i *линейно зависит от* u_i, dx^i *и* $\tilde{d}x^i$. Коэффициенты этой трилинейной функции обозначены нами $R_{ik,i}{}^{q}$ и, как видно из (105.8), зависят лишь от точки, в которой вычисляется альтернированный дифференциал (так как $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$). *Эти коэффициенты образуют четырехвалентный тензор, трижды ковариантный и один раз контравариантный в соответствии с расстановкой его индексов.*

В самом деле, левая часть (105.9) представляет собой одноковариантный тензор по основному свойству абсолютного дифференцирования. Следовательно, правая часть по отношению к индексу i также преобразуется по ковариантному закону:

$$R_{l'k',i'}{}^{q'}u_{q'}\tilde{d}x^{l'}\,dx^{k'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}R_{ik,i}{}^{q}u_q\,\tilde{d}x^l\,dx^k.$$

Так как

$$\tilde{d}x^l=\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\tilde{d}x^{l'},\qquad dx^k=\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}dx^{k'},\qquad u_q=\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^q}u_{q'},$$

то, делая в правой части соответствующую замену, получаем:

$$R_{l'k',i'}{}^{q'}u_{q'}\,\tilde{d}x^{l'}\,dx^{k'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}R_{ik,i}{}^{q}\frac{\partial x^{q'}}{\partial x^q}u_{q'}\,\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\tilde{d}x^{l'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}dx^{k'}.$$

Мы можем рассматривать любое тензорное поле u_i и произвольные бесконечно малые смещения dx^i, $\tilde{d}x^i$ из данной точки M. Полученная формула остается верной и, значит, представляет собой тождество относительно $u_{q'}$, $\tilde{d}x^{l'}$, $dx^{k'}$. Сравнивая коэффициенты при этих величинах в левой и правой частях, мы получаем:

$$R_{i'k',l'}{}^{q'}_{\cdot} = \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{q'}}{\partial x^q} R_{ik,l}{}^{q}_{\cdot}. \qquad (105.10)$$

Это показывает нам, что $R_{ik,l}{}^{q}_{\cdot}$ действительно образуют тензор трижды ковариантный и один раз контравариантный.

Тензор $R_{ik,l}{}^{q}_{\cdot}$, *составленный из объекта связности* Γ^k_{ij} *согласно* (105.8), *называется тензором кривизны (или тензором Римана — Христоффеля) пространства аффинной связности* L_n. Очевидно, тензор кривизны определен вместе с $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ в каждой точке пространства L_n и образует в нем тензорное поле:

$$R_{ik,l}{}^{q}_{\cdot} = R_{ik,l}{}^{q}_{\cdot}(x^1, \ldots, x^n).$$

Тензор кривизны *кососимметричен* по первым двум индексам:

$$R_{ik,l}{}^{q}_{\cdot} = -R_{ki,l}{}^{q}_{\cdot} \qquad (105.11)$$

Это легко усмотреть из формулы (105.8), которую можно переписать в виде

$$R_{ik,l}{}^{q}_{\cdot} = A^q_{k,\,li} - A^q_{i,\,kl}, \qquad (105.12)$$

где мы для краткости обозначили

$$A^q_{k,\,li} = \frac{\partial \Gamma^q_{li}}{\partial x^k} + \Gamma^q_{kp}\Gamma^p_{li}.$$

Легко заметить, что в аффинном (или хотя бы локально аффинном) пространстве A_n тензор кривизны тождественно равен нулю. Действительно, в этом случае можно перейти в аффинную координатную систему (хотя бы в окрестности каждой точки), в которой, как мы знаем, $\Gamma^k_{ij} \equiv 0$, а следовательно, $R_{ki,l}{}^{q}_{\cdot} \equiv 0$.

Естественно поставить теперь вопрос об *альтернированном втором абсолютном дифференциале одноконтравариантного тензорного поля* $v^i(x^1, \ldots, x^n)$. Другими словами, мы хотим вычислить $\tilde{D}Dv^i - D\tilde{D}v^i$, где символы D и $\tilde{D}$ имеют прежний смысл. Конечно, эту выкладку можно провести прямым путем подобно предыдущей выкладке для одноковариантного поля u_i. Но для краткости мы предпочтем искусственный прием с использованием уже полученной формулы (105.9), а именно, составим инвариант $v^i u_i$ путем свертывания *данного* тензора $v^i(x^1, \ldots, x^n)$ *с произвольным* тензором $u_i(x^1, \ldots, x^n)$.

По известному нам правилу (ср. (97.8)) вычислим абсолютный дифференциал D от этого инварианта:

$$D(v^i u_i) = Dv^i \cdot u_i + v^i \cdot Du_i.$$

От полученного результата вычислим абсолютный дифференциал $\tilde{D}$:

$$\tilde{D}D(v^i u_i) = \tilde{D}Dv^i \cdot u_i + Dv^i \cdot \tilde{D}u_i + \tilde{D}v^i \cdot Du_i + v^i \cdot \tilde{D}Du_i. \qquad (105.13)$$

В этой формуле мы поменяем местами символы D и $\tilde{D}$. Левая часть при этом не изменится, так как абсолютные дифференциалы D и $\tilde{D}$, взятые от инварианта, совпадают с обыкновенными дифференциалами d и $\tilde{d}$, т. е. с перестановочными между собой частными дифференциалами по параметрам α и β. В правой части поменяются местами второй и третий члены, так что сумма их не изменится. Вычитая почленно из (105.13) формулу, полученную из (105.13) взаимной перестановкой D и $\tilde{D}$, мы приходим, следовательно, к такому результату:

$$0 = (\tilde{D}Dv^i - D\tilde{D}v^i)\, u_i + v^i\, (\tilde{D}Du_i - D\tilde{D}u_i).$$

Обозначая в первом члене индекс суммирования q вместо i и делая во втором члене замену согласно (105.9), получим:

$$(\tilde{D}Dv^q - D\tilde{D}v^q)\, u_q + v^i R_{lk,i}^{\cdot\cdot\cdot q} u_q\, \tilde{d}x^l\, dx^k = 0.$$

Учитывая, что u_q — *произвольное* тензорное поле, мы должны рассматривать полученное равенство как тождество относительно u_q. Поэтому коэффициенты при u_q должны быть по отдельности равны нулю. Отсюда получаем:

$$\tilde{D}Dv^q - D\tilde{D}v^q = -R_{lk,i}^{\cdot\cdot\cdot q} v^i\, \tilde{d}x^l\, dx^k. \qquad (105.14)$$

Мы получили, таким образом, формулу, аналогичную (105.9), но для поля одноконтравариантного тензора.

Вычислим, наконец, альтернированный второй абсолютный дифференциал для произвольного тензорного поля, например, $Z_{ij}^p(x^1, \ldots, x^n)$.

Для этой цели мы прибегнем к сходному приему, а именно, свернем каждый ковариантный индекс данного тензора с произвольным одноковариантным тензором, а каждый контравариантный индекс — с произвольным одноковариантным тензором. В нашем примере мы получаем этим путем инвариант

$$I = Z_{ij}^p u_p v^i w^j, \qquad (105.15)$$

где u_p, v^i, w^j — произвольные тензорные поля. Вычислим затем $\tilde{D}DI - D\tilde{D}I$. Дифференцируя дважды правую часть (105.15), мы можем не выписывать все получающиеся при этом члены: *достаточно сохранить лишь те, в которых оба дифференцирования падают на один и тот же множитель.* В самом деле, те члены, в которых D действует на один множитель, а $\tilde{D}$ на другой, будут одинаковы как в $\tilde{D}DI$, так и в $D\tilde{D}I$ и при вычитании уничтожатся (как второй и третий члены в (105.13)). В результате получаем:

$$\tilde{D}DI - D\tilde{D}I = (\tilde{D}DZ^p_{ij} - D\tilde{D}Z^p_{ij})\, u_p v^i w^j + Z^p_{ij}(\tilde{D}Du_p - D\tilde{D}u_p)\, v^i w^j +$$
$$+ Z^p_{ij}u_p(\tilde{D}Dv^i - D\tilde{D}v^i)\, w^j + Z^p_{ij}u_p v^i(\tilde{D}Dw^j - D\tilde{D}w^j).$$

Левая часть равна нулю, так как по отношению к инварианту I D и $\tilde{D}$ превращаются в обыкновенные частные дифференциалы по α и β. В правой части заменяем круглые скобки (кроме первой) согласно (105.9) и (105.14). Получаем:

$$0 = (\tilde{D}DZ^p_{ij} - D\tilde{D}Z^p_{ij})\, u_p v^i w^j +$$
$$+ Z^p_{ij}\{R_{lk,p}^{\cdot\cdot,\cdot q}u_q v^i w^j - R_{lk,m}^{\cdot\cdot,\cdot i}u_p v^m w^j - R_{lk,m}^{\cdot\cdot,\cdot j}u_p v^i w^m\}\, \tilde{d}x^l\, dx^k.$$

Так как u_p, v^i, w^j — произвольные тензорные поля, то мы имеем здесь тождество относительно u_p, v^i, w^j, а поэтому коэффициенты при произведениях $u_p v^i w^j$ должны быть после приведения подобных членов равны нулю. Соберем коэффициенты при произведении $u_r v^s w^t$, считая индексы r, s, t как-нибудь фиксированными. Тогда в первом члене нужно положить $p, i, j = r, s, t$, во втором члене $q, i, j = r, s, t$, в третьем $p, m, j = r\ s, t$ и в четвертом $p, i, m = r, s, t$. Перенося все члены кроме первого в другую часть равенства, получим:

$$\tilde{D}DZ^r_{st} - D\tilde{D}Z^r_{st} =$$
$$= \{-R_{lk,p}^{\cdot\cdot,\cdot r}Z^p_{st} + R_{lk,s}^{\cdot\cdot,\cdot i}Z^r_{it} + R_{lk,t}^{\cdot\cdot,\cdot j}Z^r_{sj}\}\, \tilde{d}x^l\, dx^k. \qquad (105.16)$$

Итак, проальтернированный второй абсолютный дифференциал от произвольного тензора представляет собой сумму членов, составленных поочередно для каждого из его индексов, причем для каждого верхнего индекса соответствующий член составляется по схеме (105.14), *а для каждого нижнего — по схеме* (105.9). При составлении члена, отвечающего данному индексу, остальные индексы переписываются без изменения. В нашем случае первый член составлен для верхнего индекса r, второй — для нижнего индекса s, третий — для нижнего индекса t.

Хотя мы имели дело с тензором частного вида, но совершенно аналогичный вывод можно повторить и для любого тензора, так что формулированное выше правило справедливо в общем случае.

§ 106. Геометрический смысл тензора кривизны

Мы хотим показать, что тензор кривизны в каждой данной точке пространства L_n позволяет определить, насколько уклонится от своего первоначального значения вектор, произвольно выбранный в этой точке и параллельно обнесенный по какому-нибудь бесконечно