(как второй и третий члены в (105.13)). В результате получаем:

$$\tilde{D}DI - D\tilde{D}I = (\tilde{D}DZ^p_{ij} - D\tilde{D}Z^p_{ij})\, u_p v^i w^j + Z^p_{ij}\,(\tilde{D}Du_p - D\tilde{D}u_p)\, v^i w^j +$$
$$+ Z^p_{ij} u_p\,(\tilde{D}Dv^i - D\tilde{D}v^i)\, w^j + Z^p_{ij} u_p v^i\,(\tilde{D}Dw^j - D\tilde{D}w^j).$$

Левая часть равна нулю, так как по отношению к инварианту I D и $\tilde{D}$ превращаются в обыкновенные частные дифференциалы по α и β. В правой части заменяем круглые скобки (кроме первой) согласно (105.9) и (105.14). Получаем:

$$0 = (\tilde{D}DZ^p_{ij} - D\tilde{D}Z^p_{ij})\, u_p v^i w^j +$$
$$+ Z^p_{ij}\,\{R_{lk,p.}^{\cdot\cdot\,\cdot q} u_q v^i w^j - R_{lk,m.}^{\cdot\cdot\,\cdot i} u_p v^m w^j - R_{lk,m}^{\cdot\cdot\,\cdot j} u_p v^i w^m\}\, \tilde{d}x^l\, dx^k.$$

Так как u_p, v^i, w^j — произвольные тензорные поля, то мы имеем здесь тождество относительно u_p, v^i, w^j, а поэтому коэффициенты при произведениях $u_p v^i w^j$ должны быть после приведения подобных членов равны нулю. Соберем коэффициенты при произведении $u_r v^s w^t$, считая индексы r, s, t как-нибудь фиксированными. Тогда в первом члене нужно положить p, i, $j = r$, s, t, во втором члене q, i, $j = r$, s, t, в третьем p, m, $j = r$ s, t и в четвертом p, i, $m = r$, s, t. Перенося все члены кроме первого в другую часть равенства, получим:

$$\tilde{D}DZ^r_{st} - D\tilde{D}Z^r_{st} =$$
$$= \{-R_{lk,p.}^{\cdot\cdot\,\cdot r} Z^p_{st} + R_{lk,s.}^{\cdot\cdot\,\cdot i} Z^r_{it} + R_{lk,t.}^{\cdot\cdot\,\cdot j} Z^r_{sj}\}\, \tilde{d}x^l\, dx^k. \qquad (105.16)$$

Итак, проальтернированный второй абсолютный дифференциал от произвольного тензора представляет собой сумму членов, составленных поочередно для каждого из его индексов, причем для каждого верхнего индекса соответствующий член составляется по схеме (105.14), *а для каждого нижнего — по схеме* (105.9). При составлении члена, отвечающего данному индексу, остальные индексы переписываются без изменения. В нашем случае первый член составлен для верхнего индекса r, второй — для нижнего индекса s, третий — для нижнего индекса t.

Хотя мы имели дело с тензором частного вида, но совершенно аналогичный вывод можно повторить и для любого тензора, так что формулированное выше правило справедливо в общем случае.

§ 106. Геометрический смысл тензора кривизны

Мы хотим показать, что тензор кривизны в каждой данной точке пространства L_n позволяет определить, насколько уклонится от своего первоначального значения вектор, произвольно выбранный в этой точке и параллельно обнесенный по какому-нибудь бесконечно малому замкнутому контуру (мы учитываем, конечно, лишь главную часть этого уклонения).

Покажем прежде всего, что, для того чтобы пространство L_n обладало абсолютным параллелизмом, необходимо и, в случае односвязного L_n, *достаточно тождественное обращение в нуль тензора кривизны.*

Необходимость. Пусть дано, что L_n обладает абсолютным параллелизмом (§ 93). Тогда произвольный вектор $\xi^i(M_0)$, заданный в какой-нибудь точке M_0, в результате его параллельного перенесения в каждую точку M пространства L_n порождает однородное векторное поле $\xi^i(M)$. Вектор этого поля $\xi^i(M)$ при параллельном перенесении по любому пути в любую точку M' переходит в вектор того же поля $\xi^i(M')$. Отсюда следует, что при любом бесконечно малом смещении из точки M вектор поля $\xi^i(M)$ имеет абсолютный дифференциал, равный нулю:

$$D\xi^i \equiv 0. \tag{106.1}$$

Знак тождества подчеркивает, что равенство имеет место в любой точке M и для любого бесконечно малого смещения. Придадим символам D и $\tilde{D}$ тот же смысл, как и в § 105. Тогда согласно (106.1) имеют место равенства

$$D\xi^i = 0, \quad \tilde{D}\xi^i = 0.$$

Действуя на первое из них посредством $\tilde{D}$, на второе — посредством D и вычитая из первого второе почленно, получим:

$$\tilde{D}D\xi^i - D\tilde{D}\xi^i = 0.$$

Согласно (105.14) отсюда следует:

$$R_{kl,p.}^{\cdot\cdot\,\cdot i}\xi^p \tilde{d}x^k\, dx^l = 0.$$

Так как однородное векторное поле можно получить, задавшись произвольным вектором $\xi^p(M_0)$ в произвольной точке M_0, то мы имеем здесь тождество относительно ξ^p. Кроме того, это тождество и относительно $\tilde{d}x^k$ и dx^l, которые можно брать совершенно произвольными. Следовательно,

$$R_{kl,p.}^{\cdot\cdot\,\cdot i} = 0$$

в каждой точке пространства L_n. Необходимость нашего признака доказана.

Прежде чем переходить к доказательству достаточности, выведем одну формулу, представляющую и самостоятельный интерес.

Рассмотрим в произвольном L_n какую-нибудь кривую

$$x^i = x^i(t) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2), \tag{106.2}$$

соединяющую точки $P(x^i_P)$ и $Q(x^i_Q)$. Эту кривую мы будем варьировать, т. е. включим ее в семейство кривых

$$x^i = x^i(t, \alpha) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2), \tag{106.3}$$

где параметр α меняется, например, от 0 до 1. Пусть при этом

$$x^i(t, 0) = x^i(t),$$

т. е. при $\alpha = 0$ мы получаем исходную кривую. Предположим, кроме того, что концы кривой P и Q закреплены, так что при любом α

$$x^i(t_1, \alpha) = x^i_P, \quad x^i(t_2, \alpha) = x^i_Q. \tag{106.4}$$

Зададимся в начальной точке P каким-либо вектором ξ^i_P и будем его параллельно переносить вдоль каждой кривой семейства. Тогда в каждой точке t каждой кривой α определится вектор, который мы обозначим $\xi^i(t, \alpha)$. Так как вдоль каждой кривой семейства этот вектор переносится параллельно, то

$$D\xi^i(t, \alpha) = 0, \tag{106.5}$$

где D — символ абсолютного дифференциала при бесконечно малом смещении $t \to t + dt$ при постоянном α (заметим, что из теории дифференциальных уравнений следует, что $\xi^i(t, \alpha)$ будут достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми функциями t, α, поскольку, как мы предполагаем, это верно для функций $x^i(t, \alpha)$).

Пусть, далее, $\tilde{D}$ — символ абсолютного дифференциала при бесконечно малом смещении $\alpha \to \alpha + d\alpha$ при постоянном t. Перепишем для векторного поля $\xi^i(t, \alpha)$ формулу (105.14):

$$\tilde{D}D\xi^i - D\tilde{D}\xi^i = -R_{kl,p}^{\cdot\cdot\cdot i}\xi^p \tilde{d}x^k dx^l,$$

где d — символ частного дифференциала по аргументу t, а $\tilde{d}$ — по аргументу α. Так как $D\xi^i = 0$, то получаем окончательно:

$$D\tilde{D}\xi^i = R_{kl,p}^{\cdot\cdot\cdot i}\xi^p \tilde{d}x^k dx^l. \tag{106.6}$$

Эту формулу мы и хотели получить. Теперь *применим ее к пространству L_n, в котором тензор кривизны тождественно равен нулю.* Мы получаем:

$$D\tilde{D}\xi^i = 0,$$

т. е. *вектор* $\tilde{D}\xi^i(t, \alpha)$ *параллельно переносится вдоль каждой кривой семейства.*

В подробной записи $\tilde{D}\xi^i$ имеет вид

$$\tilde{D}\xi^i = \tilde{d}\xi^i + \Gamma^i_{kp}\xi^p\tilde{d}x^k. \tag{106.7}$$

Ввиду закрепленности концов P и Q их координаты x^i_P и x^i_Q остаются постоянными, так что

$$\tilde{d}x^i_P = \tilde{d}x^i_Q = 0.$$

Поэтому в точках P и Q формула (106.7) дает

$$\tilde{D}\xi^i_P = \tilde{d}\xi^i_P, \quad \tilde{D}\xi^i_Q = \tilde{d}\xi^i_Q, \tag{106.8}$$

где ξ^i_P — постоянный вектор, заданный в точке P, а $\xi^i_Q = \xi^i(t_2, \alpha)$ — результат его параллельного перенесения по кривой α в точку Q. Ввиду постоянства ξ^i_P мы имеем $\tilde{d}\xi^i_P = 0$, а следовательно, и $\tilde{D}\xi^i_P = 0$. Далее, так как вектор $\tilde{D}\xi^i(t, \alpha)$ параллельно переносится вдоль каждой кривой семейства, причем в начальной точке P кривой $\tilde{D}\xi^i = 0$, то тем самым и в каждой точке кривой

$$\tilde{D}\xi^i(t, \alpha) = 0.$$

В частности, в конечной точке Q

$$\tilde{D}\xi^i_Q = 0,$$

а значит, в силу (106.8)

$$\tilde{d}\xi^i_Q = 0.$$

Так как $\tilde{d}$ — символ частного дифференциала по аргументу α, то это показывает, что с изменением α вектор ξ^i_Q остается постоянным, *т. е. что результат параллельного перенесения вектора ξ^i_P из точки P в точку Q не зависит от той кривой семейства, по которой это перенесение совершалось.*

Если ограничиться односвязными пространствами L_n, то для любых двух путей, ведущих из точки P в точку Q, возможен непрерывный переход от одного к другому, т. е. включение их в одно семейство вида (106.3). При этом можно обеспечить и непрерывную дифференцируемость функций $x^i(t, \alpha)$ того же порядка, какая предполагается для функций $x^i(t)$, дающих параметрическое представление того и другого пути, а значит вектор ξ^i_Q, полученный перенесением вектора ξ^i_P из точки P в точку Q по любому из данных двух путей, будет одним и тем же. *Этим доказана и достаточность нашего признака.*

Аффинное пространство A_n, обладая абсолютным параллелизмом, имеет тензор кривизны, тождественно равный нулю; кроме того, его тензор кручения тоже равен нулю. Равенство нулю кривизны и кручения, очевидно, справедливо и для локально аффинного пространства.

Обратно, если пространство L_n без кручения, т. е.

$$S_{kl}^{i} = \Gamma_{kl}^{i} - \Gamma_{lk}^{i} = 0,$$

и, кроме того, без кривизны, т. е.

$$R_{kl,p.}^{\cdot\cdot\ \cdot i} = 0,$$

то это пространство будет (по крайней мере, локально) аффинным.

В самом деле, из $R_{kl,p.}^{\cdot\cdot\ \cdot i} = 0$ следует по вышедоказанному, что L_n обладает абсолютным параллелизмом, по крайней мере, в каждом односвязном куске.

Но в § 93 было показано, что L_n с абсолютным параллелизмом и без кручения является (локально) аффинным пространством. Таким образом, каждый односвязный кусок нашего L_n, а вследствие этого и само L_n, оказывается локально аффинным пространством.

Итак, для того чтобы пространство аффинной связности было (локально) аффинным, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало нулевой кривизной и нулевым кручением.

Возвращаемся к общему случаю L_n. Так как обращение в нуль тензора кривизны равносильно наличию абсолютного параллелизма в данном пространстве (в его односвязных кусках), то естественно ожидать, что отличный от нуля тензор кривизны в каком-то смысле характеризует уклонение от абсолютного параллелизма. Мы будем оценивать это уклонение следующим образом. Исходя из произвольной точки M, проделаем параллельное обнесение вектора по замкнутому пути с возвращением в прежнюю точку M. В случае абсолютного параллелизма мы возвращаемся в точку M с прежним значением вектора. (Действительно, перенесение от пути в этом случае не зависит, так что результат обнесения по замкнутому контуру будет таким же, как и тогда, когда весь этот контур стянут в одну точку M и когда, следовательно, переносимый вектор просто остается на месте.)

Уклонение же параллельно обнесенного вектора от прежнего значения будет связано, таким образом, с нарушением абсолютного параллелизма. Это уклонение мы и будем рассматривать и покажем, что для бесконечно малого контура оно (в своей главной части) характеризуется тензором кривизны в точке M.