соответствует обращению в нуль тензора кривизны в правой части равенства. Чем больше отличаются координаты тензора кривизны от нулевых значений, тем резче отклоняется параллельно обнесенный вектор $\xi^i+\Delta\xi^i$ от первоначального вектора ξ^i при прочих равных условиях. В этом смысле тензор кривизны характеризует в геометрии данного L_n степень нарушения абсолютного параллелизма.

Необходимо заметить еще, что разделение множителей x^{mk} и σ в полученной формуле является условным и зависит от выбора координат u^1, u^2 на поверхности. При переходе к другим координатам $u^{1'}$, $u^{2'}$ на той же поверхности бивектор приобретает некоторый численный множитель, причем «площадь» на этот множитель делится (если пренебречь изменениями, бесконечно малыми высшего порядка относительно σ). Инвариантным образованием является по существу лишь бесконечно малый простой бивектор σx^{mk}. Впоследствии в случае риманова пространства V_n мы сможем употребить в качестве множителя σ настоящую *площадь*, охватываемую контуром, а в качестве x^{mk} *единичный* простой бивектор. Тогда разделение множителей x^{mk} и σ приобретает инвариантный смысл.

§ 108. Тензор кривизны в L_n^0

В этом параграфе и далее до конца книги мы будем рассматривать исключительно пространства аффинной связности без кручения L_n^0, т. е. будем считать

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}. \tag{108.1}$$

Разумеется, все сделанное выше в пространстве L_n остается верным, в частности, и в L^0_n. Но тензор кривизны приобретает в этом случае и новые свойства, которыми мы и займемся. Напомним прежде всего результат, полученный в конце § 106, который можно формулировать так:

Для того чтобы пространство L^0_n было (локально) аффинным, необходимо и достаточно тождественное обращение в нуль его тензора кривизны,

$$R_{kl,\ p\cdot}^{\cdot\cdot\ \ i}=0.$$

Действительно, в L_n^0 тензор кручения S^k_{ij} равен нулю, и если, кроме того, $R_{kl,\ p\cdot}^{\cdot\cdot\ \ i}=0$, то согласно § 106 мы имеем (локально) аффинное пространство. Обратно, аффинное (или хотя бы локально аффинное) пространство представляет собой частный случай L_n^0, причем его тензор кривизны тождественно равен нулю.

Далее выведем некоторые формальные свойства тензора кривизны в L_n^0, отсутствующие в общем случае.

1°. *Тождество Риччи.* Перепишем формулу (105.12):

$$R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = A_{k,\,li}^{q} - A_{l,\,ki}^{q}, \tag{108.2}$$

где

$$A_{l,\,ki}^{q} = \frac{\partial \Gamma_{ki}^{q}}{\partial x^{l}} + \Gamma_{lp}^{q}\Gamma_{ki}^{p}. \tag{108.3}$$

Но теперь в силу (108.1) $A_{l,\,ki}^{q}$ симметрично по индексам k, i

$$A_{l,\,ki}^{q} = A_{l,\,ik}^{q}. \tag{108.4}$$

Подвергнем $R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q}$ *циклированию* по нижним индексам, т. е. произведем над этими индексами круговую подстановку, потом еще раз круговую подстановку, и полученные тензоры сложим с $R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q}$. Мы утверждаем, что в итоге получится нуль:

$$R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q} + R_{ki,\,l}^{\cdot\cdot\,\cdot q} + R_{il,\,k}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = 0. \tag{108.5}$$

В самом деле, в результате круговых подстановок индексов равенство (108.2) принимает вид:

$$R_{ki,\,l}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = A_{i,\,kl}^{q} - A_{k,\,il}^{q},$$
$$R_{il,\,k}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = A_{l,\,ik}^{q} - A_{i,\,lk}^{q}.$$

Складывая (108.2) с двумя последними равенствами почленно и принимая во внимание (108.4), мы замечаем, что в правой части каждое вычитаемое взаимно уничтожится с уменьшаемым из следующего по порядку равенства (порядок считаем круговым, так что за последним равенством следует (108.2)). Этим и доказывается соотношение (108.5) — *тождество Риччи.*

2°. *Тождество Бианки—Падова.* Для абсолютных производных тензора кривизны $\nabla_m R_{kl,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q}$ имеет место следующее тождество:

$$\nabla_m R_{kl,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q} + \nabla_k R_{lm,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q} + \nabla_l R_{mk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = 0. \tag{108.6}$$

Другими словами, *циклирование* по индексу дифференцирования m и первым двум индексам тензора кривизны k, l всегда дает нуль.

Для упрощения доказательства перейдем к координатам x^i, геодезическим в рассматриваемой точке, т. е. к таким, что в *рассматриваемой точке*

$$\Gamma_{ij}^{k} = 0. \tag{108.7}$$

В случае L_n^0 это всегда можно сделать (§ 91). Тогда в *рассматриваемой точке* абсолютные производные от любого тензора совпадают с обыкновенными частными производными, так как дополнительные члены, содержащие Γ^k_{ij}, обращаются в нуль. В частности,

$$\nabla_m R_{kl\cdot i}^{\cdot\cdot\cdot q} = \frac{\partial}{\partial x^m} R_{kl,\, i}^{\cdot\cdot\cdot q} = \frac{\partial}{\partial x^m} A^q_{l,\, ki} - \frac{\partial}{\partial x^m} A^q_{k,\, li}, \tag{108.8}$$

где последнее выражение получено с помощью (108.2). При этом, как легко получить, дифференцируя (108.3) почленно,

$$\frac{\partial}{\partial x^m} A^q_{l,\, ki} = \frac{\partial^2 \Gamma^q_{kl}}{\partial x^l \partial x^m}.$$

Мы отбросили здесь результат дифференцирования членов с произведениями Г, так как он равен нулю. В самом деле, после дифференцирования в каждом члене остается непродифференцированный множитель Г, который обращает произведение в нуль. Теперь (108.8) можно переписать в виде

$$\nabla_m R_{kl\cdot i}^{\cdot\cdot\cdot q} = \frac{\partial^2 \Gamma^q_{kl}}{\partial x^l\, \partial x^m} - \frac{\partial^2 \Gamma^q_{ll}}{\partial x^k\, \partial x^m}.$$

Циклируя по индексам m, k, l, легко убеждаемся в справедливости соотношения (108.6) — *тождества Бианки — Падова*. Правда, оно выведено нами в специальной координатной системе — геодезической в рассматриваемой точке. Но в силу своего тензорного характера оно будет справедливо и в любой координатной системе (если тензор равен нулю в одной координатной системе, то из тензорного закона преобразования следует его равенство нулю и в любой координатной системе).

3°. *Альтернированная вторая абсолютная производная.* Вернемся к формуле (105.9), в которой впервые появился у нас тензор кривизны:

$$\tilde{D}Du_i - D\tilde{D}u_i = R_{ik\cdot i}^{\cdot\cdot\cdot p} u_p \tilde{d}x^l\, dx^k. \tag{108.9}$$

Мы хотим детальнее расшифровать эту формулу, выразив абсолютные дифференциалы через абсолютные производные. При этом мы сохраняем предположения § 105, а именно, D и $\tilde{D}$ остаются символами абсолютных дифференциалов, а d и $\tilde{d}$ — символами частных дифференциалов по параметрам α и β на произвольной поверхности $\mathfrak{M}_2$

$$x^i = x^i(\alpha,\ \beta).$$

В частности,

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \alpha} d\alpha, \quad \tilde{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial \beta} \tilde{d}\beta. \tag{108.10}$$

Очевидно, $\frac{\partial x^i}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x^i}{\partial \beta}$ представляют собой одноконтравариантные тензорные поля, заданные на нашей поверхности. Как видно из (108.10), можно считать dx^i, $\tilde{d}x^i$ тоже тензорными полями, причем множители $d\alpha$, $\tilde{d}\beta$ рассматриваются как независимые переменные, имеющие одинаковые значения во всех точках поля. От полей dx^i, $\tilde{d}x^i$ можно вычислить абсолютные дифференциалы:

$$\tilde{D}dx^i = \tilde{d}\,dx^i + \Gamma^i_{kp}\,dx^p\,\tilde{d}x^k,$$
$$D\tilde{d}x^i = d\,\tilde{d}x^i + \Gamma^i_{pk}\,\tilde{d}x^k\,dx^p.$$

Вследствие отсутствия кручения и перестановочности символов d и $\tilde{d}$ получаем отсюда

$$\tilde{D}\,dx^i = D\,\tilde{d}x^i. \qquad (108.11)$$

Далее, как мы знаем, абсолютный дифференциал тензора произвольного поля (заданного в некоторой n-мерной области пространства) можно разложить по абсолютным производным. Например

$$Du_i = dx^p\nabla_p u_i, \qquad \tilde{D}u_i = \tilde{d}x^p\nabla_p u_i.$$

Эти формулы, очевидно, остаются справедливыми и при подстановке вместо u_i любого другого тензорного поля, заданного в некоторой n-мерной области пространства. Поэтому можно записать символически:

$$D = dx^q\nabla_q, \qquad \tilde{D} = \tilde{d}x^q\nabla_q. \qquad (108.12)$$

Теперь вычислим $\tilde{D}Du_i$:

$$\tilde{D}Du_i = \tilde{D}\,(dx^p\nabla_p u_i) = \tilde{D}dx^p\cdot\nabla_p u_i + dx^p\tilde{D}\,(\nabla_p u_i).$$

Аналогично получаем:

$$D\tilde{D}u_i = D\tilde{d}x^p\cdot\nabla_p u_i + \tilde{d}x^p D\,(\nabla_p u_i).$$

Отсюда, учитывая (108.11), получаем:

$$\tilde{D}Du_i - D\tilde{D}u_i = dx^p\tilde{D}\,(\nabla_p u_i) - \tilde{d}x^p D\,(\nabla_p u_i).$$

Раскрываем в правой части символы D и $\tilde{D}$ согласно (108.12), причем индексы суммирования p, q заменяем в первом члене на k, l, а во втором — на l, k. Получаем:

$$\tilde{D}Du_i - D\tilde{D}u_i = dx^k\tilde{d}x^l\,(\nabla_l\nabla_k u_i - \nabla_k\nabla_l u_i). \qquad (108.13)$$

Ввиду произвола в выборе функций $x^i(\alpha, \beta)$ значения dx^k, $\tilde{d}x^k$ в любой наперед заданной точке можно брать произвольно. Сравнивая (108.13) с (108.9) и учитывая, что правые части равны тождественно (при любых dx^k, $\tilde{d}x^l$), мы приходим к выводу

$$\nabla_l\nabla_k u_i - \nabla_k\nabla_l u_i = R_{ik,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot p} u_p. \tag{108.14}$$

Мы получили формулу для альтернированной второй абсолютной производной тензорного поля u_i. Если нам дано тензорное поле произвольного строения, например, Z^p_{lj}, то поступаем совершенно таким же образом. Прежде всего формула (108.13) остается верной при замене u_i любым тензорным полем, так как ее вывод повторяется дословно (одноковариантный характер тензора никакой роли не играет).

Таким образом,

$$\tilde{D}DZ^r_{st} - D\tilde{D}Z^r_{st} = dx^k\tilde{d}x^l\,(\nabla_l\nabla_k Z^r_{st} - \nabla_k\nabla_l Z^r_{st}).$$

Сравнивая с (105.16), мы снова убеждаемся в тождественном (относительно dx^k, $\tilde{d}x^l$) равенстве правых частей, а следовательно, можем приравнять соответствующие коэффициенты:

$$\nabla_l\nabla_k Z^r_{st} - \nabla_k\nabla_l Z^r_{st} = -R_{ik,\,p}^{\cdot\cdot\,\cdot r} Z^p_{st} + R_{ik,\,s}^{\cdot\cdot\,\cdot p} Z^r_{pt} + R_{ik,\,t}^{\cdot\cdot\,\cdot p} Z^r_{sp}. \tag{108.15}$$

Индексы суммирования во всех членах правой части обозначены через p. В частности, для одноконтравариантного тензорного поля

$$\nabla_l\nabla_k v^r - \nabla_k\nabla_l v^r = -R_{ik,\,p}^{\cdot\cdot\,\cdot r} v^p. \tag{108.16}$$

Формулы (108.14), (108.16) *являются основными*. Действительно, в общей формуле (108.15) правая часть содержит столько членов, сколько индексов у данного тензора, причем для *каждого нижнего индекса соответствующий член составляется по схеме* (108.14), *а для каждого верхнего — по схеме* (108.16). Остальные индексы переписываются каждый раз без изменений.

Полученные формулы показывают, что вторые ковариантные производные зависят, вообще говоря, от порядка дифференцирования, так что символы ∇_k, ∇_l нельзя переставлять между собой, не компенсируя эту перестановку внесением добавочных членов согласно (108.15). В технике тензорных выкладок это обстоятельство играет большую роль. Только в случае обращения тензора кривизны в нуль, т. е. в случае аффинного (или, по крайней мере, локально аффинного) пространства, правая часть (108.15) равна нулю, и символы ∇_k, ∇_l перестановочны между собой. Это, впрочем, видно уже из того, что в этом случае можно перейти (хотя бы локально) к аффинным координатам, в которых $\Gamma^k_{ij} = 0$ и символ ∇_k означает просто частное дифференцирование по x^k.

Для вывода формулы (108.15) существенно отсутствие кручения в нашем пространстве, т. е. симметрия Γ^k_{ij} по нижним индексам:

$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}.$$

На основе этого было получено равенство (108.11), использованное в нашем выводе. В случае L_n с кручением наши формулы значительно усложнились бы.

§ 109*. Проективно евклидовы пространства

В конце § 90 мы получили необходимый и достаточный признак того, что пространство L^0_n с объектом связности Γ^k_{ij} является *проективно евклидовым. Этот признак заключается в существовании такого тензора P_i в окрестности каждой точки M, что после преобразования объекта связности Γ^k_{ij} по формуле*

$$G^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}+P_i\delta^k_j+P_j\delta^k_i \tag{109.1}$$

эта окрестность становится окрестностью аффинного пространства A_n. Для удобства выкладок мы обозначили прежнее p_i через $-2P_i$:

$$P_i=-\frac{p_i}{2}. \tag{109.2}$$

Этот признак неэффективен, так как неясно, каким путем установить существование (или несуществование) такого тензора P_i. Пользуясь тензором кривизны, мы сможем решить этот вопрос, так как наша задача принимает следующий вид. *Требуется выяснить, существует ли для данной связности Γ^k_{ij} в некоторой окрестности каждой точки M такой тензор P_i, что связность* (109.1) *обладает нулевым тензором кривизны.* В самом деле, обращение в нуль тензора кривизны для связности G^k_{ij} равносильно тому, что эта связность определяет обыкновенную аффинную геометрию, по крайней мере, в окрестности точки M.

Прежде всего проведем следующую выкладку.

Подсчитаем тензор кривизны для связности

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}+T^k_{ij}, \tag{109.3}$$

где Γ^k_{ij} — *данная связность*, а T^k_{ij} — *данное тензорное поле* (напомним, что теперь у нас всегда $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$).

Тензор кривизны $\tilde{R}_{ik,\,l}{}^{\cdot\cdot\cdot q}$ для связности $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ можно вычислить по формуле

$$\tilde{R}_{ik,\,l}{}^{\cdot\cdot\cdot q}=\frac{\partial\tilde{\Gamma}^q_{li}}{\partial x^k}+\tilde{\Gamma}^q_{ks}\tilde{\Gamma}^s_{li}\,[l,\ k], \tag{109.4}$$