Для вывода формулы (108.15) существенно отсутствие кручения в нашем пространстве, т. е. симметрия Γ^k_{ij} по нижним индексам:

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}.$$

На основе этого было получено равенство (108.11), использованное в нашем выводе. В случае L_n с кручением наши формулы значительно усложнились бы.

§ 109*. Проективно евклидовы пространства

В конце § 90 мы получили необходимый и достаточный признак того, что пространство L^0_n с объектом связности Γ^k_{ij} является *проективно евклидовым. Этот признак заключается в существовании такого тензора P_i в окрестности каждой точки M, что после преобразования объекта связности Γ^k_{ij} по формуле*

$$G^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + P_i\delta^k_j + P_j\delta^k_i \tag{109.1}$$

эта окрестность становится окрестностью аффинного пространства A_n. Для удобства выкладок мы обозначили прежнее p_i через $-2P_i$:

$$P_i = -\frac{p_i}{2}. \tag{109.2}$$

Этот признак неэффективен, так как неясно, каким путем установить существование (или несуществование) такого тензора P_i. Пользуясь тензором кривизны, мы сможем решить этот вопрос, так как наша задача принимает следующий вид. *Требуется выяснить, существует ли для данной связности Γ^k_{ij} в некоторой окрестности каждой точки M такой тензор P_i, что связность* (109.1) *обладает нулевым тензором кривизны.* В самом деле, обращение в нуль тензора кривизны для связности G^k_{ij} равносильно тому, что эта связность определяет обыкновенную аффинную геометрию, по крайней мере, в окрестности точки M.

Прежде всего проведем следующую выкладку.

Подсчитаем тензор кривизны для связности

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + T^k_{ij}, \tag{109.3}$$

где Γ^k_{ij} — *данная связность*, а T^k_{ij} — *данное тензорное поле* (напомним, что теперь у нас всегда $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$).

Тензор кривизны $\tilde{R}_{ik,\,l}{}^{q}$ для связности $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ можно вычислить по формуле

$$\tilde{R}_{ik,\,l}{}^{q} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}^q_{li}}{\partial x^k} + \tilde{\Gamma}^q_{ks}\tilde{\Gamma}^s_{li}\,[l,\,k], \tag{109.4}$$

где символ $[l,\ k]$ означает требование произвести альтернацию по индексам k, l, однако без деления на 2.

Вставляя сюда $\tilde{\Gamma}^k_{li} = \Gamma^k_{li} + T^k_{li}$ и раскрывая скобки, мы получим члены трех родов.

1°. Члены, содержащие только Γ^k_{ij} и их производные; они образуют, очевидно, тензор кривизны $R_{lk,\ i}^{\cdot\cdot\ \ \cdot q}$ для связности Γ^k_{ij}.

2°. Члены, содержащие только T^k_{ij} и их производные:

$$\frac{\partial T^q_{li}}{\partial x^k} + T^q_{ks} T^s_{li}\,[l,\ k]. \tag{109.5}$$

3°. Смешанные члены:

$$\Gamma^q_{ks} T^s_{li} + T^q_{ks} \Gamma^s_{li}\,[l,\ k].$$

Нетрудно заметить, что эти члены можно записать и так:

$$\Gamma^q_{ks} T^s_{li} - \Gamma^s_{ki} T^q_{ls} - \Gamma^s_{kl} T^q_{si}\,[l,\ k]. \tag{109.6}$$

Действительно, первый член не изменился, второй член дает после альтернации по k, l то же самое, что и раньше, а третий член при альтернации пропадает. Запись (109.6) подобрана так, чтобы, объединяя ее с (109.5), мы получили:

$$\nabla_k T^q_{li} + T^q_{ks} T^s_{li}\,[l,\ k],$$

где абсолютная производная берется по связности Γ^k_{ij}.

Теперь (109.4) принимает окончательный вид

$$\tilde{R}_{lk,\ i}^{\cdot\cdot\ \ \cdot q} = R_{lk,\ i}^{\cdot\cdot\ \ \cdot q} + \nabla_k T^q_{li} + T^q_{ks} T^s_{li} - \nabla_l T^q_{ki} - T^q_{ls} T^s_{ki}. \tag{109.7}$$

Эта формула показывает, как преобразуется тензор кривизны, когда к объекту связности Γ^k_{ij} добавляется произвольный тензор T^k_{ij}.

Применим этот результат к случаю (109.1), когда

$$T^k_{ij} = P_i \delta^k_j + P_j \delta^k_i.$$

Очевидно,

$$\nabla_k T^q_{li} = \nabla_k P_l \cdot \delta^q_i + \nabla_k P_i \cdot \delta^q_l$$

(согласно (98.4) $\nabla_k \delta^i_j = 0$). Кроме того,

$$T^q_{ks} T^s_{li} = (P_k \delta^q_s + P_s \delta^q_k)\ (P_l \delta^s_i + P_i \delta^s_l) = \delta^q_i P_k P_l + \delta^q_l P_k P_i + 2\delta^q_k P_i P_l.$$

Мы воспользовались здесь очевидными соотношениями

$$\delta^q_s \delta^s_i = \delta^q_i, \qquad P_s \delta^s_l = P_l \ \text{ и т. п.}$$

Вставляя полученные выражения в (109.7), мы приходим к тензору кривизны для связности G_{ij}^k:

$$\tilde{R}_{ik,\, i.}^{\cdot\cdot\, q} = R_{ik,\, i.}^{\cdot\cdot\, q} + \delta_l^q(\nabla_k P_i - P_k P_i) - \delta_k^q(\nabla_l P_i - P_l P_i) + \delta_i^q(\nabla_k P_l - \nabla_l P_k).$$

Введем обозначение

$$P_{ki} = \nabla_k P_i - P_k P_i. \tag{109.8}$$

Тогда предыдущее равенство принимает вид

$$\tilde{R}_{lk,\, i.}^{\cdot\cdot\, q} = R_{lk,\, i.}^{\cdot\cdot\, q} + \delta_l^q P_{ki} - \delta_k^q P_{li} + \delta_i^q (P_{kl} - P_{lk}). \tag{109.9}$$

Переходим к выводу необходимых признаков проективно евклидовой связности. Пусть связность Γ_{ij}^k проективно евклидова, т. е. можно подобрать такой тензор P_i, что связность $G_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + P_i\,\delta_j^k + P_j\delta_i^k$ имеет кривизну нуль:

$$\tilde{R}_{lk,\, i.}^{\cdot\cdot\, q} = R_{lk,\, i.}^{\cdot\cdot\, q} + \delta_l^q P_{ki} - \delta_k^q P_{li} + \delta_i^q(P_{kl} - P_{lk}) = 0.$$

В таком случае

$$R_{lk,\, i.}^{\cdot\cdot\, q} = \delta_k^q P_{li} - \delta_l^q P_{ki} + \delta_i^q (P_{lk} - P_{kl}), \tag{109.10}$$

причем

$$P_{ki} = \nabla_k P_i - P_k P_i. \tag{109.11}$$

Это значит прежде всего, что тензор кривизны для связности Γ_{ij}^k должен иметь специальную алгебраическую структуру (109.10). *Возникает вопрос, как установить для данного тензора кривизны $R_{lk,\, i.}^{\cdot\cdot\, q}$ имеет ли он такую структуру и, если имеет, как найти по нему тензор P_{ik}.*

Эта задача решается следующим образом.

Из тензора кривизны можно составить дважды ковариантный тензор R_{ki} путем свертывания верхнего индекса с первым нижним:

$$R_{ki} = R_{sk,\, i.}^{\cdot\cdot\, s}. \tag{109.12}$$

Полученный таким образом тензор R_{ki} мы будем называть *тензором Риччи*. Если тензор кривизны имеет строение (109.10), то после свертывания по индексам q, l получаем:

$$R_{ki} = P_{ki} - nP_{ki} + P_{ik} - P_{ki} = -nP_{ki} + P_{ik}. \tag{109.13}$$

Из этого соотношения нетрудно выразить обратно P_{ki} через R_{ki}, R_{ik}. Для этого перепишем (109.13), поменяв местами индексы k, i:

$$R_{ik} = -nP_{ik} + P_{ki}.$$

Два полученных уравнения решаем относительно двух «неизвестных» P_{ik}, P_{ki}, умножая первое уравнение на n и складывая со вторым почленно. Это дает нам

$$nR_{ki} + R_{ik} = -(n^2 - 1)\, P_{ki},$$

откуда

$$P_{ki} = -\frac{nR_{ki} + R_{ik}}{n^2 - 1}. \qquad (109.14)$$

Таким образом, если тензор кривизны имеет строение (109.10), то тензор P_{ki} необходимо выражается через тензор Риччи вполне определенным образом. *Поэтому тензор кривизны имеет строение* (109.10) *в том и только в том случае, когда, подставляя* P_{ki} *из* (109.14) *в* (109.10), *мы приходим к тождеству, т. е. когда имеет место равенство*

$$R_{lk,\ i\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot q} = -\frac{1}{n^2-1}\delta_k^q(nR_{li} + R_{il}) +$$

$$+ \frac{1}{n^2-1}\delta_l^q(nR_{ki} + R_{ik}) - \frac{\delta_i^q}{n+1}(R_{lk} - R_{kl}). \qquad (109.15)$$

Заметим, что при $n = 2$ тензор $R_{lk,\ i\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot q}$ *всегда* имеет строение (109.10), так что условие (109.15) *всегда* представляет собой тождество.

Действительно, отличные от нуля координаты тензора $R_{lk,\ i\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot q}$ мы получаем лишь в случае $l, k = 1, 2$ (или $l, k = 2, 1$, но этот случай дает разницу лишь в знаке координаты). В результате мы имеем только четыре существенно различные координаты, например, такие:

$$R_{12,\ 1\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot 1},\quad R_{12,\ 1\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot 2},\quad R_{12,\ 2\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot 1},\quad R_{12,\ 2\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot 2}.$$

Для них равенство (109.10) примет вид

$$R_{12,\ 1\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot 1} = P_{12} - 2P_{21},$$
$$R_{12,\ 1\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot 2} = P_{11},$$
$$R_{12,\ 2\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot 1} = P_{22},$$
$$R_{12,\ 2\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot 2} = -P_{21} + 2P_{12}.$$

Очевидно, полученные уравнения всегда совместны относительно P_{ij}, а следовательно, тензор кривизны всегда можно представить в виде (109.10).

Возвращаемся к случаю произвольного $n > 1$. Согласно (109.11)

$$\nabla_k P_i = P_k P_i + P_{ki}. \qquad (109.16)$$

Возьмем почленно абсолютную производную ∇_l, причем в правой части $\nabla_l P_k$, $\nabla_l P_i$ заменяем снова из (109.16). Получим:

$$\nabla_l \nabla_k P_i = (\nabla_l P_k) P_i + P_k \nabla_l P_i + \nabla_l P_{ki} =$$
$$= P_l P_k P_i + P_{lk} P_i + P_k P_l P_i + P_k P_{li} + \nabla_l P_{ki}.$$

Альтернируя по l, k (без деления на 2), получаем согласно (108.14)

$$R_{lk,\ i\cdot}^{\cdot\cdot\ \cdot q} P_q = (P_{lk} - P_{kl}) P_i + P_k P_{li} - P_l P_{ki} + \nabla_l P_{ki} - \nabla_k P_{li}.$$

Вставляя, наконец, в левую часть выражения для $R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q}$ из (109.10) и выполняя суммирование по q, получаем окончательно:

$$0 = \nabla_l P_{ki} - \nabla_k P_{li}. \qquad (109.17)$$

Итак, для того чтобы связность Γ_{ij}^k *была проективно евклидовой, необходимо, чтобы тензор кривизны имел строение* (109.10), *где тензор* P_{li} *удовлетворяет условию* (109.17).

Докажем, что эти условия являются и достаточными. Пусть нам дано, что для некоторой связности Γ_{ij}^k имеют место равенства (109.10) и (109.17). Будем искать тензор P_i из системы дифференциальных уравнений с неизвестными функциями $P_i(x^1, \ldots, x^n)$:

$$\nabla_k P_i = P_k P_i + P_{ki}. \qquad (109.18)$$

Если подробно выписать абсолютную производную, то эти уравнения примут вид

$$\frac{\partial P_i}{\partial x^k} = \Gamma_{ki}^p P_p + P_k P_i + P_{ki}, \qquad (109.19)$$

т. е. каждая частная производная 1-го порядка от каждой неизвестной функции P_i выражена через самые неизвестные функции (а также через известные функции Γ_{ki}^p, P_{ki}). Условия интегрируемости такой системы составляются, как известно, следующим образом: дифференцируем (109.19) почленно по x^l, заменяем возникающие в правой части производные $\frac{\partial P_j}{\partial x^l}$, используя снова (109.19), а затем альтернируем по индексам k, l. В левой части получается нуль, а в правой части некоторое выражение, содержащее неизвестные функции P_i в конечном виде. Если полученное соотношение удовлетворяется тождественно (при любых P_i и любых x^i), то мы говорим, что *условия интегрируемости удовлетворяются тождественно*.

В нашем случае мы эту же по существу выкладку предпочтем провести в абсолютных производных, а именно, возьмем общее уравнение системы в виде (109.18), подействуем на него посредством ∇_l, заменим в правой части производные $\nabla_l P_i$, снова используя (109.18), и, наконец, проальтернируем по k, l. Но все это мы уже выполнили, исходя из уравнения (109.16), причем пришли в результате к условиям интегрируемости (109.17). Но сейчас нам дано, что равенство (109.17) имеет место. *Следовательно, условия интегрируемости для системы* (109.18) *выполняются тождественно.* Отсюда мы заключаем (см. сноску к § 93, стр. 442), что система (109.18) имеет решение при любых начальных значениях неизвестных функций

$$P_i = (P_i)_0,$$

заданных для какой-нибудь точки $x^i = x^i_0$. Это решение существует по крайней мере, в некоторой окрестности точки x^i_0. Построим теперь связность

$$G^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + P_i \delta^k_j + P_j \delta^k_i$$

и вычислим для нее тензор кривизны $\tilde{R}_{ik,l}^{\cdot\cdot\cdot q}$. Он выражается, как мы знаем, формулой (109.9), причем тензор P_{ki} в этой формуле имеет вид

$$P_{ki} = \nabla_k P_i - P_k P_i,$$

т. е., как видно из (109.18), совпадает с рассматриваемым нами тензором P_{ki}. Учитывая, что, кроме того, имеет место (109.10), мы убеждаемся, что $\tilde{R}_{ik,l}^{\cdot\cdot\cdot q} = 0$, а это означает, что связность Γ^k_{ij} проективно евклидова.

Итак, необходимый и достаточный признак проективно евклидовой связности состоит в том, что тензор кривизны для нее имеет вид

$$R_{ik,l}^{\cdot\cdot\cdot q} = \delta^q_k P_{li} - \delta^q_l P_{ki} + \delta^q_i (P_{lk} - P_{kl}), \tag{109.20}$$

причем тензор P_{ki} удовлетворяет условию

$$\nabla_l P_{ki} - \nabla_k P_{li} = 0. \tag{109.21}$$

Заметим, что при этом тензор P_{ki} необходимо выражается через тензор кривизны формулой (109.14):

$$P_{ki} = -\frac{nR_{ki} + R_{ik}}{n^2 - 1}. \tag{109.22}$$

Мы уже отмечали, что при $n = 2$ условие (109.20) выполняется для любого тензора кривизны, *так что необходимым и достаточным признаком остается лишь условие* (109.21). *Наоборот, при $n > 2$ достаточно ограничиться условием* (109.20), *так как условие* (109.21) *является его следствием.*

Чтобы показать это, используем тождество Бианки—Падова:

$$\nabla_m R_{ik,l}^{\cdot\cdot\cdot q} + \nabla_l R_{km,i}^{\cdot\cdot\cdot q} + \nabla_k R_{ml,i}^{\cdot\cdot\cdot q} = 0. \tag{109.23}$$

Три слагаемых получаются последовательно одно из другого круговой подстановкой индексов m, l, k. Подставляя сюда вместо тензора кривизны его выражение (109.20), мы получаем $\left(\text{если еще умножить левую часть на } \frac{1}{6}\right)$:

$$\delta^q_{[k} \nabla_m P_{l]i} + \delta^q_i \nabla_{[m} P_{lk]} = 0. \tag{109.24}$$

В этом нетрудно убедиться, если фактически выполнить указанные здесь альтернации по индексам m, k, l. Свернем левую часть

(109.24) по индексам q, i. Получим:

$$\delta^i_{[k}\nabla_m P_{l]i} + \delta^i_i \nabla_{[m} P_{lk]} = 0.$$

Первый член дает $\nabla_{[m}P_{lk]}$, второй $n\nabla_{[m}P_{lk]}$ (так как $\delta^i_i = n$), так что в результате

$$\nabla_{[m}P_{l\,k]} = 0.$$

Теперь (109.24) принимает упрощенный вид

$$\delta^q_{[k}\nabla_m P_{l]i} = 0.$$

Возьмем индексы k, m, l различными. Это возможно, так как $n > 2$. Положим $q = k$. Тогда $\delta^q_k = 1$, $\delta^q_m = \delta^q_l = 0$, и в результате альтернации получаем $\left(\text{опуская коэффициент } \frac{1}{6}\right)$:

$$\nabla_m P_{li} - \nabla_l P_{mi} = 0.$$

Мы действительно вывели условие (109.21) из условия (109.20).

В произвольном $\overset{0}{L}_n$ можно составить тензор

$$P_{ik.i.}^{\;\;\;\;q} = R_{ik.i.}^{\;\;\;\;q} + \delta^q_k \frac{nR_{li} + R_{il}}{n^2-1} - \delta^q_l \frac{nR_{ki} + R_{ik}}{n^2-1} + \delta^q_i \frac{R_{lk} - R_{kl}}{n+1}, \quad (109.25)$$

который называется *тензором проективной кривизны*. Его обращение в нуль, равносильное условию (109.20), необходимо и достаточно, следовательно, для того, чтобы $\overset{0}{L}_n$ (при $n > 2$) было проективно евклидовым.

Отметим, что при геодезическом преобразовании связности в любом $\overset{0}{L}_n$

$$\Gamma^k_{ij} \to \Gamma^k_{ij} + P_i\delta^k_j + P_j\delta^k_i$$

с любым тензорным полем P_i *тензор проективной кривизны остается инвариантным.*

§ 110. Тензор кривизны в римановом пространстве V_n

Начиная с этого параграфа и до конца книги, мы будем рассматривать только римановы пространства (исключение составляет лишь часть § 113). Как мы знаем, каждое риманово пространство снабжено определенной связностью без кручения (риманова связность). Под $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ мы будем понимать коэффициенты этой связности. Все сказанное выше о тензоре кривизны в пространствах аффинной связности L_n и, в частности, в пространствах $\overset{0}{L}_n$ (§ 108) применимо, таким образом, и к римановой связности. Соответствующий тензор кривизны $R_{ik.l.}^{\;\;\;\;q}$ мы будем называть *тензором кривизны риманова пространства*. При этом тензор кривизны риманова