(109.24) по индексам q, i. Получим:

$$\delta^i_{[k}\nabla_m P_{l]i} + \delta^l_i \nabla_{[m} P_{lk]} = 0.$$

Первый член дает $\nabla_{[m}P_{lk]}$, второй $n\nabla_{[m}P_{lk]}$ (так как $\delta^l_i = n$), так что в результате

$$\nabla_{[m}P_{l\,k]} = 0.$$

Теперь (109.24) принимает упрощенный вид

$$\delta^q_{[k}\nabla_m P_{l]i} = 0.$$

Возьмем индексы k, m, l различными. Это возможно, так как $n>2$. Положим $q=k$. Тогда $\delta^q_k = 1$, $\delta^q_m = \delta^q_l = 0$, и в результате альтернации получаем $\left(\text{опуская коэффициент } \frac{1}{6}\right)$:

$$\nabla_m P_{li} - \nabla_l P_{mi} = 0.$$

Мы действительно вывели условие (109.21) из условия (109.20).

В произвольном $\overset{0}{L}_n$ можно составить тензор

$$P_{ik.i.}^{\cdot\cdot q} = R_{ik.i.}^{\cdot\cdot q} + \delta^q_k \frac{nR_{li} + R_{il}}{n^2-1} - \delta^q_l \frac{nR_{ki} + R_{ik}}{n^2-1} + \delta^q_i \frac{R_{lk} - R_{kl}}{n+1}, \quad (109.25)$$

который называется *тензором проективной кривизны*. Его обращение в нуль, равносильное условию (109.20), необходимо и достаточно, следовательно, для того, чтобы $\overset{0}{L}_n$ (при $n>2$) было проективно евклидовым.

Отметим, что при геодезическом преобразовании связности в любом $\overset{0}{L}_n$

$$\Gamma^k_{ij} \to \Gamma^k_{ij} + P_i\delta^k_j + P_j\delta^k_i$$

с любым тензорным полем P_i *тензор проективной кривизны остается инвариантным*.

§ 110. Тензор кривизны в римановом пространстве V_n

Начиная с этого параграфа и до конца книги, мы будем рассматривать только римановы пространства (исключение составляет лишь часть § 113). Как мы знаем, каждое риманово пространство снабжено определенной связностью без кручения (риманова связность). Под $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ мы будем понимать коэффициенты этой связности. Все сказанное выше о тензоре кривизны в пространствах аффинной связности L_n и, в частности, в пространствах $\overset{0}{L}_n$ (§ 108) применимо, таким образом, и к римановой связности. Соответствующий тензор кривизны $R_{ik.i.}^{\cdot\cdot q}$ мы будем называть *тензором кривизны риманова пространства*. При этом тензор кривизны риманова пространства обладает рядом важных свойств, которые не имеют места в L_n^0 (и тем более в L_n общего вида).

Чтобы обнаружить эти свойства, мы рассмотрим *ковариантный тензор кривизны*, опустив верхний индекс при помощи метрического тензора:

$$R_{lk,\,ij} = R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q} g_{qj}. \tag{110.1}$$

Этот тензор отличается высокой симметрией своего строения. Чтобы раскрыть ее, мы вычислим его координаты. Вставляя вместо $R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\,\cdot q}$ выражение (105.8), получаем:

$$R_{lk,\,ij} = \left(\frac{\partial \Gamma_{li}^q}{\partial x^k} + \Gamma_{kp}^q \Gamma_{li}^p\right) g_{qj}\,[k,\,l], \tag{110.2}$$

где символ $[k,\,l]$ означает требование произвести альтернацию по индексам k, l без деления на 2.

Выражение в скобках, если фиксировать индексы l, i и обозначить $\Gamma_{li}^q = \Gamma^q$, *формально* имеет вид абсолютной производной $\nabla_k \Gamma^q$; наружный множитель g_{qj} вызывает опускание верхнего индекса q, которое можно выполнить и под знаком абсолютного дифференцирования (см. (98.8)), так что получится

$$\nabla_k \Gamma_j = \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x^k} - \Gamma_{kj}^p \Gamma_p.$$

После возвращения на место индексов l, i получаем:

$$R_{lk,\,ij} = \left(\frac{\partial \Gamma_{j,\,li}}{\partial x^k} - \Gamma_{kj}^p \Gamma_{p,\,li}\right)[k,\,l],$$

где, согласно (94.5), (94.8),

$$\Gamma_{j,\,li} = g_{qj} \Gamma_{li}^q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}\right). \tag{110.3}$$

Конечно, фактически Γ^q не является тензором, однако проведенная выкладка законна, так как в каждой *данной* координатной системе можно рассмотреть и тензор с координатами Γ^q в *этой* системе.

Вставляя (110.3) в предыдущую формулу и выполняя альтернацию, получаем окончательно:

$$R_{lk,\,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^l \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^l \partial x^j}\right) + g_{pq}\left(\Gamma_{lj}^p \Gamma_{ki}^q - \Gamma_{kj}^p \Gamma_{li}^q\right). \tag{110.4}$$

Обратим внимание на закон составления *первой скобки*. Дифференцируем координату метрического тензора g_{lj}, взятую с индексами, крайними у $R_{lk,\,ij}$ по x^k, x^i, где k, i — средние индексы $R_{lk,\,ij}$.

Получаем:

$$\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^k \partial x^i},$$

альтернируем по первой паре индексов у $R_{lk,\,ij}$, т. е. по l, k; полученный результат альтернируем по второй паре индексов у $R_{lk,\,ij}$, т. е. по i, j, и получаем первую скобку в (110.4). Можно было бы альтернировать сначала по второй паре индексов, а потом по первой; результат от этого не меняется.

Вторая скобка в (110.4) получается после альтернирования по индексам первой пары l, k или по индексам второй пары i, j выражения

$$g_{pq}\Gamma^p_{lj}\Gamma^q_{ki},$$

в котором на один множитель Γ перешли индексы, крайние у $R_{lk,\,ij}$, а на другой — средние.

Отсюда ясно, что первая и вторая пары индексов у $R_{lk,\,ij}$ играют совершенно симметричную роль, так что

$$R_{lk,\,ij} = R_{ij,\,lk}. \tag{110.5}$$

Ковариантный тензор кривизны не меняется при перестановке между собой первой и второй пар индексов (при сохранении порядка индексов внутри каждой пары).

Разумеется, это правило легко проверить и непосредственным подсчетом, пользуясь формулой (110.4).

Далее, отсюда следует, что тензор кривизны кососимметричен по индексам второй пары так же, как и по индексам первой пары. В самом деле, еще при первом своем появлении в произвольном L_n тензор кривизны обладал косой симметрией по индексам первой пары

$$R_{lk,\,i\cdot}^{\cdot\cdot\,\cdot q} = -R_{kl,\,i\cdot}^{\cdot\cdot\,\cdot q}.$$

При опускании индекса q это свойство, очевидно, сохраняется:

$$R_{lk,\,ij} = -R_{kl,\,ij}. \tag{110.6}$$

Переставляя теперь между собой индексы k и l в равенстве (110.5), мы замечаем, что левая часть равенства меняет знак, а следовательно, меняет знак и правая часть. Но для правой части равенства перестановка происходит во второй паре индексов, так что мы получаем:

$$R_{ij,\,lk} = -R_{ij,\,kl}. \tag{110.7}$$

Итак, ковариантный тензор кривизны кососимметричен как по индексам первой пары, так и по индексам второй пары.

В произвольном L_n^0 и, в частности, в V_n тензор кривизны удовлетворяет тождеству Риччи (§ 108)

$$R_{lk,\,i.}^{\cdot\cdot\,\cdot q}+R_{ki,\,l.}^{\cdot\cdot\,\cdot q}+R_{il,\,k.}^{\cdot\cdot\,\cdot q}=0.$$

Опустив индекс q, мы получаем *тождество Риччи для ковариантного тензора кривизны*

$$R_{lk,\,ij}+R_{ki,\,lj}+R_{il,\,kj}=0. \tag{110.8}$$

Здесь циклирование происходит по первым трем индексам. *Однако тождество остается верным, если производить циклирование по любым трем индексам ковариантного тензора кривизны.*

В самом деле, какие бы три индекса в $R_{lk,\,ij}$ ни выбрать, всегда можно добиться, пользуясь (110.5)—(110.7) и производя соответствующую подстановку индексов, чтобы избранные индексы заняли три первых места и при этом численное значение координаты $R_{lk,\,ij}$ не изменилось. Применяя затем тождество Риччи с циклированием по первым трем индексам, мы убеждаемся, что тождество будет верным и для первоначального (произвольного) положения этих индексов.

Ряд тождественных (имеющих место в любом V_n) линейных зависимостей, связывающих между собой координаты тензора кривизны, естественно, наводит на мысль подсчитать, *сколько существенных координат имеет тензор кривизны.*

Тензор кривизны $R_{ij,\,kl}$ как тензор четвертой валентности имеет, собственно говоря, n^4 координат, так как каждый из четырех индексов может принимать n значений.

Мы ставим вопрос: сколько координат тензора R можно задавать произвольно *), с тем чтобы остальные координаты тождественно выражались через них.

Подсчитаем число этих существенных координат.

1. Рассмотрим те координаты, в которых только два различных индекса, например, 1 и 2. Независимая координата только одна, так как $R_{12,\,12}$, $R_{12,\,21}$, $R_{21,\,12}$, $R_{21,\,21}$ либо равны, либо отличаются знаками. Остальные же координаты равны нулю.

Таких пар индексов будет C_n^2 и каждая пара дает одну существенную координату (C_n^m — число сочетаний из n по m).

Следовательно, существенных координат, имеющих только два различных индекса, будет $C_n^2\cdot 1$.

2. Пусть координата имеет три различных индекса, например, 1, 2, 3. Существенные координаты суть $R_{12,\,13}$, $R_{21,\,23}$, $R_{31,\,32}$, остальные либо нули, либо равны этим, либо отличаются только знаками, что нетрудно проверить. Так как выбрать три индекса

*) Рассматривая, разумеется, тензор R для произвольной римановой метрики данного числа измерений n.

из n можно C_n^3 способами, то число существенных координат с тремя различными индексами будет:

$$C_n^3 \cdot 3.$$

3. Пусть все четыре индекса различны, например, 1, 2, 3, 4. Возьмем компоненты: $R_{12,\,34}$, $R_{23,\,14}$, $R_{31,\,24}$. На основании алгебраических свойств тензора $R_{ij,\,kl}$ все остальные координаты с индексами 1, 2, 3, 4 можно выразить через эти. Но и эти координаты не все существенны, ибо их сумма равна нулю на основании тождества Риччи. Среди этих трех координат независимых, следовательно, только две.

Число существенных координат с четырьмя различными индексами будет:

$$C_n^4 \cdot 2.$$

Всего существенных координат

$$N = C_n^2 \cdot 1 + C_n^3 \cdot 3 + C_n^4 \cdot 2 = \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 1 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2.$$

Итак:

$$N = \frac{n^2\,(n^2-1)}{12}. \qquad (110.9)$$

Отметим, что отношение числа существенных координат N к их общему числу n^4 при неограниченном возрастании n стремится к $\frac{1}{12}$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N}{n^4} = \frac{1}{12}. \qquad (110.10)$$

До сих пор мы выяснили только то, что все n^4 координат тензора R могут быть тождественно выражены через N из них. Собственно, нужно еще показать, что эти N координат уже все существенны, т. е. что между ними нет никаких тождественных зависимостей. Другими словами, пусть заданы эти N координат совершенно произвольно, а остальные выражены через них. Тогда всегда можно построить риманову метрику так, что в данной точке этот наперед заданный тензор R будет служить тензором кривизны. На доказательстве этого останавливаться не будем.

Применим формулу (110.9) для частных случаев:

1) $n=2$, $N=1$; 2) $n=3$, $N=6$.

Заметим, что для трехмерного пространства тензор кривизны имеет столько же существенных координат, сколько и основной метрический тензор g_{ij}.

Рассмотрим, наконец, тензор Риччи

$$R_{ki} = R_{qk,\,i}^{\cdot\cdot\cdot\,q}. \qquad (110.11)$$

в случае риманова пространства. Как видно из (110.1), поднимая последний индекс у $R_{lk,ij}$, мы получим $R_{lk,i}^{\cdot\cdot\;\cdot q}$:

$$R_{lk,i}^{\cdot\cdot\;\cdot q}=g^{qj}R_{lk,ij}.$$

Подставляя это значение в (110.11), получим:

$$R_{ki}=g^{qj}R_{qk,ij}. \tag{110.12}$$

Легко заметить, что *тензор Риччи в римановом пространстве будет симметричным*:

$$R_{ki}=R_{ik}. \tag{110.13}$$

В самом деле, по свойствам ковариантного тензора кривизны

$$R_{qk,ij}=R_{ji,kq}$$

(мы сделали перестановку индексов внутри каждой пары и, кроме того, перестановку пар между собой). Теперь (110.12) можно переписать в виде

$$R_{ki}=g^{qj}R_{ji,kq}=R_{ik}.$$

В римановом пространстве с тензором кривизны связан еще скалярный инвариант — *скалярная кривизна* R, которая получается в результате свертывания тензора Риччи с метрическим тензором

$$R=g^{ij}R_{ij}. \tag{110.14}$$

§ 111. Кривизна риманова пространства в данной точке и данном двумерном направлении

Мы вернемся к построению § 107, выполненному в произвольном L_n. Полученный результат, а именно формула (107.30), верен, в частности, и в римановом пространстве:

$$\Delta\xi^i\approx R_{mk,l}^{\cdot\cdot\;\cdot i}\xi^l x^{mk}\sigma. \tag{111.1}$$

Однако теперь эта формула может быть уточнена: в то время как «площадь» σ в L_n не имела инвариантного смысла и вводилась условно, в V_n можно будет понимать под σ настоящую площадь, охваченную рассматриваемым контуром на поверхности $\mathfrak{M}_2$. Одновременно уточнится и выбор направляющего бивектора x^{mk}: он станет *единичным бивектором*.

Чтобы избежать оговорок о неизотропном характере поверхности $\mathfrak{M}_2$, *мы предположим сначала, что* V_n — *собственно риманово пространство*. Тогда поверхность $\mathfrak{M}_2$ — всегда неизотропная и несет на себе тоже собственно риманову геометрию.

В § 107 мы согласовали нумерацию координат u^1, u^2 на $\mathfrak{M}_2$ с направлением обхода контура. *Специализируем эти координаты еще*