в случае риманова пространства. Как видно из (110.1), поднимая последний индекс у $R_{lk,\,ij}$, мы получим $R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\;\cdot\,q}$:

$$R_{lk,\,i}^{\cdot\cdot\;\cdot\,q} = g^{qj} R_{lk,\,ij}.$$

Подставляя это значение в (110.11), получим:

$$R_{ki} = g^{qj} R_{qk,\,ij}. \tag{110.12}$$

Легко заметить, что *тензор Риччи в римановом пространстве будет симметричным*:

$$R_{ki} = R_{ik}. \tag{110.13}$$

В самом деле, по свойствам ковариантного тензора кривизны

$$R_{qk,\,ij} = R_{ji,\,kq}$$

(мы сделали перестановку индексов внутри каждой пары и, кроме того, перестановку пар между собой). Теперь (110.12) можно переписать в виде

$$R_{ki} = g^{qj} R_{ji,\,kq} = R_{ik}.$$

В римановом пространстве с тензором кривизны связан еще скалярный инвариант — *скалярная кривизна* R, которая получается в результате свертывания тензора Риччи с метрическим тензором

$$R = g^{ij} R_{ij}. \tag{110.14}$$

§ 111. Кривизна риманова пространства в данной точке и данном двумерном направлении

Мы вернемся к построению § 107, выполненному в произвольном L_n. Полученный результат, а именно формула (107.30), верен, в частности, и в римановом пространстве:

$$\Delta\xi^i \approx R_{mk,\,l}^{\cdot\cdot\;\cdot\,i} \xi^l x^{mk} \sigma. \tag{111.1}$$

Однако теперь эта формула может быть уточнена: в то время как «площадь» σ в L_n не имела инвариантного смысла и вводилась условно, в V_n можно будет понимать под σ настоящую площадь, охваченную рассматриваемым контуром на поверхности $\mathfrak{M}_2$. Одновременно уточнится и выбор направляющего бивектора x^{mk}: он станет *единичным бивектором*.

Чтобы избежать оговорок о неизотропном характере поверхности $\mathfrak{M}_2$, *мы предположим сначала, что* V_n — *собственно риманово пространство*. Тогда поверхность $\mathfrak{M}_2$ — всегда неизотропная и несет на себе тоже собственно риманову геометрию.

В § 107 мы согласовали нумерацию координат u^1, u^2 на $\mathfrak{M}_2$ с направлением обхода контура. *Специализируем эти координаты еще* *и в том отношении, чтобы площади на $\mathfrak{M}_2$ выражались интегралами*

$$\sigma = \iint_D du^1 du^2, \tag{111.2}$$

т. е. по внешности так же, как на обычной плоскости в прямоугольных координатах. Это нетрудно сделать. В самом деле, площади на $\mathfrak{M}_2$ можно вычислять по формуле (88.9):

$$\sigma = \iint_D \sqrt{G}\, du^1 du^2,$$

причем

$$G = \operatorname{Det} |G_{\alpha\beta}| = G_{11}G_{22} - G_{12}^2 > 0,$$

где $G_{\alpha\beta}$ — метрический тензор на поверхности $\mathfrak{M}_2$. Чтобы эта формула приняла вид (111.2) достаточно добиться тождественного обращения $\sqrt{G}$ в единицу, что можно сделать за счет преобразования координат u^1, u^2 на поверхности. Обозначим через $\tilde{u}^1$, $\tilde{u}^2$ искомые координаты на поверхности. Тогда согласно (88.7)

$$\sqrt{G} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} & \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \sqrt{\tilde{G}}.$$

Пусть $\tilde{u}^1$, $\tilde{u}^2$ связаны с u^1, u^2 уравнениями

$$\tilde{u}^1 = \varphi(u^1, u^2), \quad \tilde{u}^2 = u^2,$$

где $\varphi(u^1, u^2)$ — пока неопределенная функция. Тогда

$$\sqrt{G} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \sqrt{\tilde{G}} = \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \sqrt{\tilde{G}}. \tag{111.3}$$

Теперь выберем функцию $\varphi(u^1, u^2)$

$$\varphi(u^1, u^2) = \int \sqrt{G(u^1, u^2)}\, du^1.$$

В таком случае $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u^1} = \sqrt{G}$ и, следовательно, из (111.3) получаем:

$$\sqrt{\tilde{G}} = 1.$$

В дальнейшем переходим к координатам $\tilde{u}^1$, $\tilde{u}^2$, причем обозначаем их просто u^1, u^2. Итак, теперь

$$\sqrt{G} = 1 \tag{111.4}$$

и площади выражаются формулой (111.2). Далее, в координатах u^1, u^2 бивектор

$$x^{mk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^m}{\partial u^1}\frac{\partial x^k}{\partial u^2}-\frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{\partial x^m}{\partial u^2}\right) \qquad (111.5)$$

будет *единичным*. Это значит, что отвечающая ему площадь, а именно, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\frac{\partial x^i}{\partial u^1}$, $\frac{\partial x^i}{\partial u^2}$, будет равна единице (напомним, что касательное пространство в данной точке M, в котором расположены эти векторы, будет теперь евклидовым пространством R_n). В самом деле, согласно (85.12) $G_{\alpha\beta}$ представляют собой скалярные произведения векторов $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$, $\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}$ (сейчас у нас α, $\beta=1$, 2), а следовательно, площадь нашего параллелограмма выразится формулой

$$W=\sqrt{\operatorname{Det}|G_{\alpha\beta}|}=\sqrt{G}.$$

Эта формула относится в сущности к обычной геометрии (и даже планиметрии) и легко может быть получена из обычной векторной алгебры. Кроме того, она получается как частный случай при $m=2$ из (54.30). Сравнивая с (111.4), убеждаемся, что $W=1$.

Вернемся к формуле (111.1). Так как величина σ в ней определялась по формуле (111.2), а бивектор x^{mk} — по формуле (111.5), то *теперь σ выражает площадь, охваченную контуром на поверхности $\mathfrak{M}_2$, а бивектор x^{mk}, определяющий двумерное касательное направление к $\mathfrak{M}_2$ и направление обхода контура, является единичным.*

Заметим, что двумерным направлением, определенным выбором ориентации и величиной площади (в данном случае равной единице), простой бивектор x^{mk} вполне определяется (см. § 37, геометрическая характеристика простого поливектора). *Поэтому в окончательном итоге мы можем забыть о специальном выборе координат u^1, u^2 на $\mathfrak{M}_2$ и рассматривать уклонение $\Delta\xi^i$ параллельно обнесенного вектора просто в зависимости от первоначального вектора ξ^i, от единичного бивектора x^{mk}, отвечающего двумерному касательному к $\mathfrak{M}_2$ направлению и ориентированного по направлению обхода контура, и от охваченной контуром площади σ на поверхности.* При этом вектор $\Delta\xi^i$ (в своей главной части) меняется пропорционально площади σ. В римановом пространстве мы всегда будем понимать формулу (111.1) в этом смысле.

Опираясь на формулу (111.1), можно ввести понятие кривизны риманова пространства в данной точке и данном двумерном направлении.

Рассмотрим прежнее построение с той лишь разницей, что исходный вектор ξ^i возьмем единичным и лежащим в касательной плоскости к поверхности $\mathfrak{M}_2$ в точке M (рис. 21).

В результате обхода мы вернемся в точку M с вектором $\xi^i+\Delta\xi^i$, который, вообще говоря, уже не будет лежать в касательной плоскости.

Спроектируем $\xi^i+\Delta\xi^i$ на касательную плоскость; пусть проекция будет $\xi^i+\Delta_1\xi^i$; это — вектор, лежащий в касательной плоскости и отличающийся от вектора $\xi^i+\Delta\xi^i$ на перпендикулярную к касательной плоскости составляющую $\Delta_2\xi^i$. Итак:

$$\xi^i+\Delta\xi^i=\xi^i+\Delta_1\xi^i+\Delta_2\xi^i. \qquad (111.6)$$

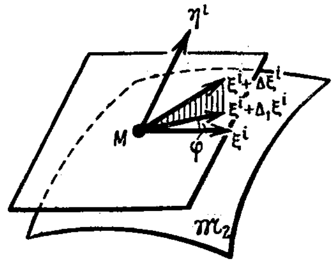

Рис. 21.

Обозначим через φ угол поворота от ξ^i к $\xi^i+\Delta_1\xi^i$. Углу мы припишем знак плюс, если поворот идет в том же направлении (принятом за положительное), что и обход по контуру, и знак минус, — если в обратном направлении.

Построим единичный вектор η^i, лежащий в касательной плоскости и повернутый на прямой угол в положительном направлении по отношению к вектору ξ^i (рис. 21). Построим на единичных векторах ξ^i, η^i бивектор, который по общему правилу будет иметь вид

$$\tilde{x}^{ij}=\frac{\xi^i\eta^j-\xi^j\eta^i}{2}.$$

Бивектор этот характеризует нам единицу площади (так как ξ^i, η^i единичные и взаимно перпендикулярные), лежащую в касательной плоскости, и направление вращения от ξ^i к η^i, т. е. совпадающее с направлением обхода контура. Другими словами, $\tilde{x}^{ij}$ совпадает с бивектором x^{ij}, фигурирующим в формуле (111.1):

$$x^{ij}=\frac{1}{2}(\xi^i\eta^j-\xi^j\eta^i). \qquad (111.7)$$

Приступим к вычислению угла φ. Выкладку ведем, пренебрегая в $\Delta\xi^i$ и $\Delta_1\xi^i$ бесконечно малыми высшего порядка относительно σ. Покажем прежде всего, что $\Delta_1\xi^i\perp\xi^i$. Из (111.6) мы получаем:

$$\Delta\xi^i=\Delta_1\xi^i+\Delta_2\xi^i. \qquad (111.8)$$

Очевидно, $\Delta_2\xi^i$, будучи ортогонален к касательной плоскости, ортогонален по самому определению и к любому лежащему в ней вектору, в частности, к ξ^i. Остается показать, что $\Delta\xi^i$ тоже ортогонален к ξ^i.

Составим скалярное произведение $\Delta\xi^i$ и ξ^i, пользуясь формулой (111.1):

$$g_{ij}\xi^j\Delta\xi^i \approx g_{ij}\xi^j R_{mk,\,l}{}^{i}{}^{\cdot}\, x^{mk}\xi^l\sigma = R_{mk,\,lj}x^{mk}\xi^l\xi^j\sigma = 0.$$

Действительно, координаты $R_{mk,\,lj}$ антисимметричны по индексам l и j и, следовательно, при свертывании с $\xi^l\xi^j$, симметричными по тем же индексам, дают нуль. Чтобы убедиться в этом, поменяем обозначение индексов суммирования l и j. С одной стороны, сумма от этого не меняется, с другой стороны, она изменит знак, так как $\xi^l\xi^j$ не изменится, а $R_{mk,\,lj}$ изменит знак. Это возможно лишь в случае равенства нулю.

Итак, $\Delta_2\xi^i$ и $\Delta\xi^i \perp \xi^i$, значит, $\Delta_1\xi^i$ тоже перпендикулярен к ξ^i. Но так как $\Delta_1\xi^i$ лежит в касательной плоскости, то он будет коллинеарен с единичным вектором η^i, именно, равен $\eta^i \operatorname{tg}\varphi$, как легко видеть из прямоугольного треугольника с катетом — вектором ξ^i и гипотенузой — вектором $\xi^i + \Delta_1\xi^i$. Отсюда скалярное произведение единичного вектора η^i на коллинеарный с ним $\Delta_1\xi^i$ будет равно $\operatorname{tg}\varphi$ (учитывая и знак):

$$\operatorname{tg}\varphi \approx g_{ij}\Delta_1\xi^i\eta^j.$$

Равенство не нарушится, если мы заменим здесь $\Delta_1\xi^i$ через $\Delta\xi^i$, т. е. добавим к $\Delta_1\xi^i$ вектор $\Delta_2\xi^i$, ортогональный к касательной плоскости и дающий потому нуль в скалярном произведении с η^i. Итак,

$$\operatorname{tg}\varphi \approx g_{ij}\Delta\xi^i\eta^j.$$

Мы видим, что $\operatorname{tg}\varphi$ вместе с $\Delta\xi^i$ является бесконечно малым порядка σ; пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, можно заменить $\operatorname{tg}\varphi$ через φ, а вместо $\Delta\xi^i$ подставить его выражение из (111.1). Получаем:

$$\varphi \approx g_{ij}\eta^j R_{mk,\,l}{}^{i}{}^{\cdot}\,\xi^l x^{mk}\sigma$$

или, суммируя по i:

$$\varphi \approx R_{mk,\,lj}x^{mk}\xi^l\eta^j\sigma. \tag{111.9}$$

Перепишем то же самое, изменив обозначения индексов суммирования: l на j и j на l:

$$\varphi \approx R_{mk,\,jl}x^{mk}\xi^j\eta^l\sigma = -R_{mk,\,lj}x^{mk}\xi^j\eta^l\sigma.$$

Складывая с (111.9) и деля на 2, получим:

$$\varphi \approx R_{mk,\,lj}x^{mk}\,\frac{\xi^l\eta^j - \xi^j\eta^l}{2}\,\sigma$$

и, принимая во внимание (111.7), пишем окончательно:

$$\varphi \approx R_{mk,\,lj}x^{mk}x^{lj}\sigma. \tag{111.10}$$

Можно заменить здесь приближенное равенство точным, явно записав ошибку, которая аналогично (107.31) будет вида $\varepsilon\sigma$:

$$\varphi = R_{mk,\,lj}x^{mk}x^{lj}\sigma + \varepsilon\sigma, \tag{111.11}$$

где $\varepsilon \to 0$ при стягивании контура в точку M. Отсюда следует

$$\frac{\varphi}{\sigma} = R_{mk,\,lj}x^{mk}x^{lj} + \varepsilon,$$

а значит

$$\lim \frac{\varphi}{\sigma} = R_{mk,\,lj}x^{mk}x^{lj}. \tag{111.12}$$

Уясним смысл этой формулы.

Со стороны алгебраической в правой части мы имеем инвариант как результат свертывания двух тождественных бивекторов x^{mk}, x^{lj}, одного с первой парой индексов тензора кривизны, другого — со второй парой. При этом геометрически x^{mk} зависит лишь от направления двумерной касательной плоскости к поверхности $\mathfrak{M}_2$ и направления обхода в ней, а $R_{mk,\,lj}$ — лишь от точки M.

Этими данными вполне определяется, как показывает левая часть (111.12), значение угла поворота φ, приходящееся на единицу охваченной обходом площади, взятое в пределе для бесконечно малого обхода.

При этом «угол поворота» φ есть угол между исходным вектором ξ^i, взятым в касательной плоскости, и проекцией $\xi^i + \Delta_1\xi^i$ обнесенного вектора $\xi^i + \Delta\xi^i$ на эту плоскость. *Величина*

$$K = \lim \frac{\varphi}{\sigma} = R_{mk,\,lj}x^{mk}x^{lj} \tag{111.13}$$

называется кривизной риманова пространства V_n в данной точке M и в данном двумерном направлении (характеризуемом единичным бивектором x^{mk}).

Очевидно, что направление самого обхода роли не играет, так как при изменении его на обратное меняется знак у всех координат x^{mk} и кривизна, как видно из (111.13), остается прежней.

Бивектор x^{mk} был у нас единичным, т. е. он определял единичную площадь. Можно задать плоскость и направление обхода, пользуясь для этого и не единичным бивектором ξ^{ij}, построенным на двух произвольных векторах этой плоскости.

Мы хотим выразить через ξ^{ij} кривизну K пространства V_n в соответствующем двумерном направлении.

Для этой цели превратим ξ^{ij} в единичный бивектор путем нормирования, т. е. деления его на определяемую им площадь S. Очевидно, что плоскость и ориентация бивектора от этого не изменятся, площадь же станет единичной, т. е. ξ^{ij} превратится в x^{ij}:

$$x^{ij} = \frac{\xi^{ij}}{S}.$$

Подставляя это выражение в (111.13), получим:

$$K = R_{mk,\,lj}\frac{\xi^{mk}\xi^{lj}}{S^2}.$$

Но S^2 — квадрат площади, определяемой бивектором ξ^{ij}, — равен согласно (54.28) (при $m=2$)

$$S^2 = g_{i_1 i_2, j_1 j_2}\xi^{i_1 i_2}\xi^{j_1 j_2} = \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & g_{i_1 j_2} \\ g_{i_2 j_1} & g_{i_2 j_2} \end{vmatrix}\xi^{i_1 i_2}\xi^{j_1 j_2}$$

и, следовательно:

$$K = \frac{R_{i_1 i_2, j_1 j_2}\xi^{i_1 i_2}\xi^{j_1 j_2}}{\begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & g_{i_1 j_2} \\ g_{i_2 j_1} & g_{i_2 j_2} \end{vmatrix}\xi^{i_1 i_2}\xi^{j_1 j_2}}. \qquad (111.14)$$

Так обобщается (111.12) на случай, когда двумерное направление (и направление обхода) задано произвольным бивектором.

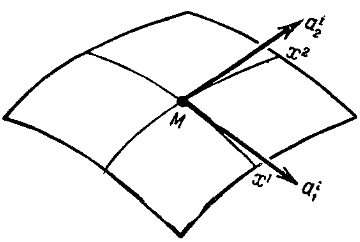

Рис. 22.

Определитель, стоящий в знаменателе, есть четырежды ковариантный тензор с теми же алгебраическими свойствами, что и тензор кривизны.

Применим формулу (111.14) к одному частному случаю. Вычислим кривизну в данной точке M по направлению координатной поверхности x^1, x^2 (рис. 22).

Векторы a_i^1 и a_2^i, касательные соответственно к координатным линиям x^1, x^2, имеют координаты $a_1^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^1}$, $a_2^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^2}$, или

$$\begin{aligned} &a_1^i\,(1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ &a_2^i\,(0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0). \end{aligned}$$

Плоскость, построенная на этих векторах, и будет касательной к координатной поверхности x^1, x^2. Составим соответствующий бивектор $\xi^{ij} = \frac{1}{2}(a_1^i a_2^j - a_1^j a_2^i)$. Его координаты могут отличаться от нуля только при i и j, принимающих значения 1, 2. Так как $\xi^{11} = \xi^{22} = 0$, то отличным от нуля остаются только

$$\xi^{12} = -\xi^{21}.$$

Формула (111.14) для нашего случая примет вид

$$K = \frac{4R_{12,12}\xi^{12}\xi^{12}}{4\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}\xi^{12}\xi^{12}}.$$

При суммированиях в правой части мы оставили только отличные от нуля члены. Коэффициенты 4 появились потому, что возможны четыре комбинации индексов ($i_1 = 1$, $i_2 = 2$ или наоборот комбинируются с $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ или наоборот), дающие одинаковые члены. Остальные комбинации дают нуль. Окончательно:

$$K = \lim \frac{\varphi}{\sigma} = \frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \qquad (111.15)$$

Результаты этого параграфа можно повторить во всем существенном и для псевдориманова пространства, но только ограничиваясь неизотропными $\mathfrak{M}_2$, т. е. неизотропными двумерными направлениями в данной точке M. Не вдаваясь в особенности геометрического истолкования кривизны K в этом случае, мы будем просто считать, что K определяется формулой (111.14).

§ 112. Тензор кривизны в случае двумерного риманова пространства V_2

Разберем частный случай риманова пространства, именно $n = 2$. Внутренняя геометрия поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, определяемая первой квадратичной формой Гаусса:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

представляет образец такой геометрии. В наших обозначениях

$$u,\ v = x^1,\ x^2, \quad E,\ F,\ G = g_{11},\ g_{12},\ g_{22}.$$

Риманов тензор кривизны в этом случае будет иметь только одну существенную координату $R_{12,12}$, так как среди отличных от нуля координат все или равны этой, или отличаются от нее лишь знаком.

Выясним, как преобразуется $R_{12,12}$ при переходе к новой координатной системе. По общему закону преобразования для $R_{ij,kl}$ получаем:

$$R_{1'2',1'2'} = \frac{\partial x^i}{\partial u^{1'}}\frac{\partial x^j}{\partial u^{2'}}\frac{\partial x^k}{\partial u^{1'}}\frac{\partial x^l}{\partial u^{2'}}R_{ij,kl}.$$

При суммировании в правой части отличны от нуля только те члены, где $i = 1$, $j = 2$ или наоборот, иначе $R_{ij,kl} = 0$. Запишем суммирование по i и j в развернутом виде, причем вместо $R_{21,kl}$