Формула (111.14) для нашего случая примет вид

$$K=\frac{4R_{12,12}\xi^{12}\xi^{12}}{4\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}\xi^{12}\xi^{12}}.$$

При суммированиях в правой части мы оставили только отличные от нуля члены. Коэффициенты 4 появились потому, что возможны четыре комбинации индексов ($i_1=1$, $i_2=2$ или наоборот комбинируются с $j_1=1$, $j_2=2$ или наоборот), дающие одинаковые члены. Остальные комбинации дают нуль. Окончательно:

$$K=\lim\frac{\varphi}{\sigma}=\frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}. \qquad (111.15)$$

Результаты этого параграфа можно повторить во всем существенном и для псевдориманова пространства, но только ограничиваясь неизотропными $\mathfrak{M}_2$, т. е. неизотропными двумерными направлениями в данной точке M. Не вдаваясь в особенности геометрического истолкования кривизны K в этом случае, мы будем просто считать, что K определяется формулой (111.14).

§ 112. Тензор кривизны в случае двумерного риманова пространства V_2

Разберем частный случай риманова пространства, именно $n=2$. Внутренняя геометрия поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, определяемая первой квадратичной формой Гаусса:

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

представляет образец такой геометрии. В наших обозначениях

$$u,\ v=x^1,\ x^2,\quad E,\ F,\ G=g_{11},\ g_{12},\ g_{22}.$$

Риманов тензор кривизны в этом случае будет иметь только одну существенную координату $R_{12,12}$, так как среди отличных от нуля координат все или равны этой, или отличаются от нее лишь знаком.

Выясним, как преобразуется $R_{12,12}$ при переходе к новой координатной системе. По общему закону преобразования для $R_{ij,kl}$ получаем:

$$R_{1'2',1'2'}=\frac{\partial x^i}{\partial u^{1'}}\frac{\partial x^j}{\partial u^{2'}}\frac{\partial x^k}{\partial u^{1'}}\frac{\partial x^l}{\partial u^{2'}}R_{ij,kl}.$$

При суммировании в правой части отличны от нуля только те члены, где $i=1$, $j=2$ или наоборот, иначе $R_{ij,kl}=0$. Запишем суммирование по i и j в развернутом виде, причем вместо $R_{21,kl}$

пишем — $R_{12,kl}$; получим:

$$R_{1'2',1'2'}=\left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}-\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}\right)R_{12,kl}\frac{\partial x^k}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{2'}}.$$

Поступая аналогично с другой парой индексов k и l, найдем окончательно:

$$R_{1'2',1'2'}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}\end{vmatrix}^2 R_{12,12}. \qquad (112.1)$$

Итак, при преобразовании координат координата $R_{12,12}$ умножается на квадрат якобиева определителя преобразования. Другими словами, $R_{12,12}$ является относительным инвариантом веса 2.

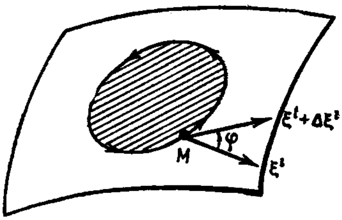

Рис. 23.

Теперь посмотрим, как обстоит дело с кривизной в нашем случае. Так как само пространство всего двух измерений, то всякая поверхность $\mathfrak{M}_2$ в нем совпадает с ним самим (по крайней мере в некоторой окрестности каждой своей точки), и в каждой точке будет лишь единственная двумерная плоскость, заполняющая все «касательное пространство» в этой точке. Отсюда: *кривизна пространства будет зависеть только от выбора точки.*

Применим формулу (111.15) к поверхности x^1, x^2, которая совпадает в нашем случае с самим пространством V_2.

Обозначая кривизну в данной точке через K, получим:

$$K=\frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22}-g_{22}^2}. \qquad (112.2)$$

С алгебраической точки зрения определенное таким образом K представляет собой инвариант преобразования координат в качестве частного двух относительных инвариантов, каждый веса 2.

Займемся геометрическим смыслом кривизны K. Мы замечаем, что построения предыдущего параграфа (мы по-прежнему ограничиваемся собственно римановым случаем) теперь упрощаются. Излишне, во-первых, задавать поверхность, так как она обязательно совпадает с пространством. Излишне оговаривать, что вектор ξ^i берется в касательной плоскости к поверхности, так как касательная плоскость совпадает со всем евклидовым пространством R_2, «касательным» в данной точке, и, следовательно, автоматически заключает любой вектор ξ^i в этой точке. По этой же причине обнесенный вектор $\xi^i+\Delta\xi^i$ лежит в касательной плоскости, и проектировать его на нее также излишне. Угол φ получается непосредственно как угол поворота любого вектора, параллельно обнесенного вокруг некоторой области нашего двумерного пространства (рис. 23)*). Если σ — площадь этой охваченной обходом области, то согласно (111.15)

$$K = \lim \frac{\varphi}{\sigma}, \tag{112.3}$$

где K — кривизна в той точке, куда в пределе стягивается область, охваченная обходом.

Если наша двумерная риманова геометрия получена, в частности, как внутренняя геометрия поверхности в классическом смысле, то кривизна K (как будет показано в § 117) совпадает с полной или гауссовой кривизной поверхности. Это значит, что кривизна K может быть определена и внешним путем.

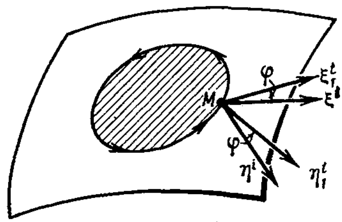

Рис. 24.

А именно, если взять внутреннюю геометрию на поверхности, которой придана вполне определенная форма во вмещающем евклидовом пространстве, то гауссова кривизна K в каждой точке поверхности равна произведению главных кривизн $k_1 k_2$ (т. е. кривизн тех двух нормальных сечений, для которых кривизна достигает экстремума). Если поверхность изгибать, т. е. деформировать, оставляя на ней неизменной внутреннюю геометрию, то гауссова кривизна K не меняется, хотя по отдельности главные кривизны k_1 и k_2, конечно, меняются.

Рассмотрим параллельное перенесение вектора в V_2 по конечному замкнутому контуру. До сих пор мы рассматривали в сущности лишь бесконечно малый контур, для которого согласно (112.3)

$$\varphi = K\sigma + \varepsilon\sigma, \tag{112.4}$$

где $\varepsilon \to 0$ вместе с $\sigma \to 0$. Теперь, оставаясь по-прежнему в римановом пространстве двух измерений, рассмотрим конечный замкнутый контур обхода, являющийся границей некоторой односвязной **) области D. Для большой простоты и наглядности продолжаем ограничиваться случаем собственно риманова пространства.

1) Прежде всего для угла поворота φ безразлично, какой вектор взят в начальной точке M, ξ^i или любой другой η^i (рис. 24).

*) Напомним, что углу φ мы приписываем знак плюс, если поворот вектора происходит в том же направлении, что и обход, и минус — если в обратном.

**) Это значит, что область D может быть обслужена одной координатной системой x^1, x^2 и ограничена одним кусочно-гладким и несамопересекающимся контуром.

В самом деле, при параллельном перенесении углы между векторами ξ^i и η^i не меняются, т. е.

$$\widehat{(\xi^i,\ \eta^i)} = \widehat{(\xi^i_1,\ \eta^i_1)},$$

где ξ^i_1 и η^i_1 — наши векторы после обхода. Далее векторы ξ^i, ξ^i_1, η^i, η^i_1 в точке M лежат в евклидовом пространстве, «касательном» в этой точке, т. е. в одной двумерной плоскости, так как у нас пространство двух измерений. Отсюда ясно, что раз угол между ξ^i и η^i не изменился, то оба вектора повернулись на один и тот же угол.

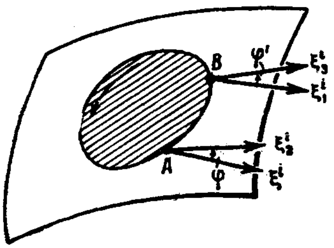

Рис. 25.

2) Угол поворота φ не зависит от выбора начальной точки обхода на данном контуре. Это прямо следует из свойств параллельного перенесения.

Параллельно переносим вектор ξ^i, начиная обход контура из точки A (рис. 25). Пусть в точку B вектор пришел с координатами ξ^i_1, далее после полного обхода вернулся в A с координатами ξ^i_2 и, наконец, при дальнейшем перенесении вновь пришел в B с координатами ξ^i_3. Легко видеть, что угол φ равен углу φ', так как ξ^i_1 и ξ^i_3 суть соответственно ξ^i и ξ^i_2, параллельно перенесенные из A в B, а угол при параллельном перенесении сохраняет свое значение. С другой стороны, φ есть угол поворота при обходе с начальной точкой A и начальным вектором ξ^i, а φ' — угол поворота с начальной точкой B и вектором ξ^i_1. Так как $\varphi = \varphi'$, то требуемое доказано: φ зависит только от контура обхода.

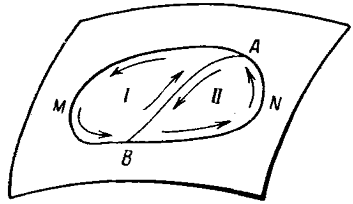

Рис. 26.

3) Предположим, что область D, охваченная обходом, разбита на две составляющие области I и II (рис. 26). Тогда угол поворота φ при обнесении вектора вокруг области равен сумме углов поворота φ_1 и φ_2 при обнесении составляющих областей, при условии, что обходы совершаются в одном направлении. Действительно, исходя из точки A и обнося какой-нибудь вектор вокруг области I (обход $AMBA$), мы приходим в A с вектором, повернутым на угол φ_1: после дальнейшего обхода $ABNA$ около области II мы возвращаемся в A с новым поворотом вектора на угол φ_2. В итоге вектор повернулся на $\varphi_1 + \varphi_2$. Но сделанный нами обход $AMBABNA$ заключает отрезок AB, пройденный сначала в направ-

лении BA и сейчас же в обратном направлении AB, в результате чего мы возвращаемся в точку B с прежним значением переносимого вектора. Поэтому, не меняя окончательного результата обхода, из нашего обхода можно выкинуть отрезки BA и AB. Получается обход $AMBNA$, т. е. обход около составной области, а угол поворота вектора остается прежним, т. е. $\varphi_1+\varphi_2$. Таким образом, доказано, что угол поворота обнесенного вектора есть аддитивная функция областей с данной ориентацией. Свойство это доказано для двух составляющих областей, но оно, как это легко следует отсюда, будет верно и для любого числа составляющих областей.

Исходя из этих свойств, легко вывести и интегральную формулу угла поворота φ при обходе по контуру, охватывающему конечную область D.

Разобьем нашу область на бесконечно возрастающее число бесконечно малых частей, хотя бы, например, бесконечно сгущающейся сеткой координатных линий. Пусть $\Delta\sigma$ — площадь какой-нибудь элементарной области, $\Delta\varphi$ — угол поворота вектора при ее обходе. Мы предполагаем, что разбиение это произведено так, что, выписывая формулу (112.4) для элементарных областей

$$\Delta\varphi = K\,\Delta\sigma + \varepsilon\,\Delta\sigma,$$

мы будем иметь *равномерное* стремление к нулю бесконечно малого коэффициента ε для всех этих областей в совокупности. Как можно показать, в случае, например, разбиения бесконечно сгущающейся координатной сеткой, эта равномерность стремления ε к нулю будет следовать автоматически из непрерывности и дифференцируемости нужное число раз всех рассматриваемых нами в данной области функций.

Согласно доказанному полный угол поворота φ равен сумме углов $\Delta\varphi$, полученных при обходе составляющих областей: $\varphi=\sum\Delta\varphi$, где $\sum$ распространена на все элементарные области разбиения, или

$$\varphi=\sum(K\,\Delta\sigma+\varepsilon\,\Delta\sigma).$$

Итак, φ уклоняется от $\sum K\,\Delta\sigma$ на $\sum\varepsilon\,\Delta\sigma$; оценим последнее выражение по модулю. Очевидно, что

$$\left|\sum\varepsilon\,\Delta\sigma\right| < |\varepsilon_m|\sum\Delta\sigma, \qquad (112.5)$$

где ε_m — наибольшее из всех ε по модулю. Сделанное предположение о равномерности стремления к нулю всех ε в совокупности равносильно стремлению к нулю максимального из них ε_m. Так как $\sum\Delta\sigma$ дает, очевидно, площадь σ всей области D, т. е. величину постоянную, то вместе с ε_m, как видно из (112.5), стремится к нулю и уклонение φ от $\sum K\,\Delta\sigma$. Переходим к пределу. В пределе $\sum K\,\Delta\sigma$ становится равным φ, обращаясь в то же время в двойной интеграл, взятый по области D. Итак, окончательно:

$$\varphi=\iint\limits_D K\,d\sigma. \tag{112.6}$$

Эта формула выражает угол поворота φ при обходе односвязной области D в зависимости от ее площади и распределения значений K на ней.

Случай $K=\text{const}$. Применим основную формулу (112.6) к частному случаю, когда кривизна K нашего двумерного пространства

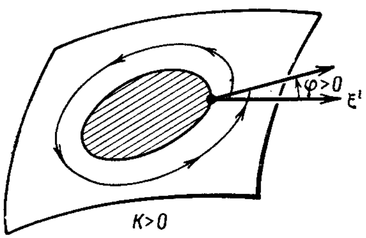

Рис. 27.

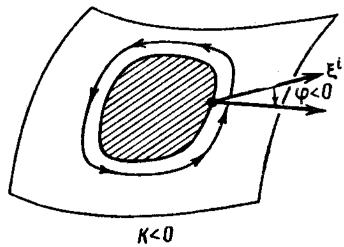

Рис. 28.

остается постоянной для всех его точек. (В случае классической дифференциальной геометрии мы рассматриваем, следовательно, внутреннюю геометрию поверхности постоянной кривизны.)

Формула (112.6) принимает вид

$$\varphi=K\iint\limits_D d\sigma=K\sigma, \tag{112.7}$$

иначе говоря, *угол поворота φ пропорционален площади обхода, причем коэффициентом пропорциональности служит кривизна K.* Различаем следующие три случая.

1. $K=0$. Угол поворота $\varphi=0$, что и понятно, так как геометрия является евклидовой.

2. $K>0$. Следовательно, и $\varphi>0$, т. е. обнесенный вектор оказывается повернутым в направлении обхода (рис. 27).

3. $K<0$; $\varphi<0$, поворот совершается в обратном направлении (рис. 28).

Отметим, что если, в частности, проделать обход по геодезическому треугольнику ABC (т. е. такому, стороны которого суть отрезки геодезических), то угол φ будет равен сумме внутренних углов минус π. Таким образом, для геодезического треугольника

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi+K\sigma.$$

Здесь K — постоянная кривизна пространства и σ — площадь треугольника (рис. 29). При выводе формулы мы берем исходный вектор ξ^i касательным к геодезической AB, а затем, перенося его из вершины в вершину, используем постоянство угла, образуемого геодезической с вектором, параллельно переносимым вдоль нее. Последнее вытекает из того, что вектор, касательный к геодезической, тоже является вектором, параллельно переносимым вдоль нее.

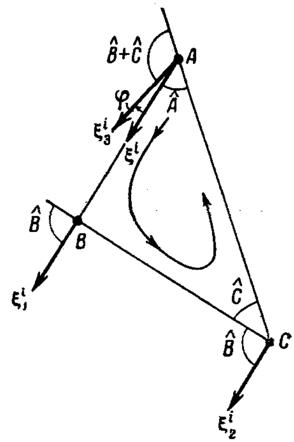

Рис 29.

§ 113. Римановы координаты *)

В § 103 мы рассмотрели полугеодезические координатные системы в V_n. К ним близко примыкают по своим свойствам так называемые *римановы координатные системы*. Их можно было бы рассмотреть в том же месте, но мы предпочтем это сделать теперь в связи с некоторыми применениями к тензору кривизны.

Римановы координаты можно строить не только в римановом пространстве V_n, но и в любом пространстве аффинной связности. Так мы и поступим, причем ограничимся пространством аффинной связности без кручения L_n^0.

Пусть L_n^0 отнесено к произвольной координатной системе x^i в окрестности произвольной точки $M_0(x_0^i)$. Далее, проведем через M_0 по всем направлениям геодезические линии. Каждая из них задается начальным касательным вектором ξ^i, произвольно выбранным в точке M_0.

В этом случае параметрические уравнения геодезической

$$x^i = x^i(\tau), \tag{113.1}$$

где τ — канонический параметр, вполне определяются (§ 90) из ее дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} \tag{113.2}$$

*) Оставшаяся часть этой главы не обязательна для понимания главы X.