углов минус π. Таким образом, для геодезического треугольника

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi+K\sigma.$$

Здесь K — постоянная кривизна пространства и σ — площадь треугольника (рис. 29). При выводе формулы мы берем исходный вектор ξ^i касательным к геодезической AB, а затем, перенося его из вершины в вершину, используем постоянство угла, образуемого геодезической с вектором, параллельно переносимым вдоль нее. Последнее вытекает из того, что вектор, касательный к геодезической, тоже является вектором, параллельно переносимым вдоль нее.

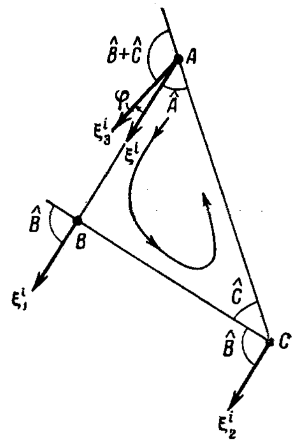

Рис 29.

§ 113. Римановы координаты *)

В § 103 мы рассмотрели полугеодезические координатные системы в V_n. К ним близко примыкают по своим свойствам так называемые *римановы координатные системы*. Их можно было бы рассмотреть в том же месте, но мы предпочтем это сделать теперь в связи с некоторыми применениями к тензору кривизны.

Римановы координаты можно строить не только в римановом пространстве V_n, но и в любом пространстве аффинной связности. Так мы и поступим, причем ограничимся пространством аффинной связности без кручения L_n^0.

Пусть L_n^0 отнесено к произвольной координатной системе x^i в окрестности произвольной точки $M_0(x_0^i)$. Далее, проведем через M_0 по всем направлениям геодезические линии. Каждая из них задается начальным касательным вектором ξ^i, произвольно выбранным в точке M_0.

В этом случае параметрические уравнения геодезической

$$x^i=x^i(\tau), \tag{113.1}$$

где τ — канонический параметр, вполне определяются (§ 90) из ее дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2}=-\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} \tag{113.2}$$

*) Оставшаяся часть этой главы не обязательна для понимания главы X.

и начальных условий

$$[x^i]_{\tau=0} = x_0^i, \quad \left[\frac{dx^i}{d\tau}\right]_{\tau=0} = \xi^i. \tag{113.3}$$

Для простоты мы полагаем $\tau=0$ в точке M_0. Тогда произвол в выборе канонического параметра τ на данной геодезической сводится лишь к его умножению на произвольное число $A \neq 0$ (см. (90.4)):

$$\tau^* = A\tau. \tag{113.4}$$

Каждой точке M на произвольной геодезической, проведенной через M_0, мы сопоставим n чисел

$$y^i = \xi^i \tau, \tag{113.5}$$

где τ — значение канонического параметра в точке M. *Эти числа мы и будем называть римановыми координатами точки M.* Очевидно, в точке M_0

$$y^i = 0.$$

Наглядно, y^i будут координаты того вектора $\overrightarrow{M_0M'}$ в касательном пространстве A_n в точке M_0, в который превратится отрезок геодезической M_0M, если эту геодезическую изобразить в A_n в виде прямой, сохраняя прежний канонический параметр τ (и прежний начальный касательный вектор ξ^i).

Отметим прежде всего, что *y^i не зависят от выбора канонического параметра τ на данной геодезической.* В самом деле, при переходе к новому параметру $\tau^* = A\tau$ мы получаем:

$$\overset{*}{\xi}{}^i = \left[\frac{dx^i}{d\tau^*}\right]_0 = \frac{1}{A}\left[\frac{dx^i}{d\tau}\right]_0 = \frac{1}{A}\xi^i,$$

а следовательно,

$$\overset{*}{y}{}^i = \overset{*}{\xi}{}^i \tau^* = \xi^i \tau = y^i,$$

т. е. y^i не меняются. Однако мы не можем утверждать, что каждой точке M отвечают вполне определенные y^i, так как, быть может, в ту же точку M можно прийти из M_0 по другой геодезической.

Но можно доказать, что y^i действительно способны служить координатами в L_n^0, по крайней мере, в некоторой окрестности точки M_0.

Пусть нам даны численные значения y^i (не равные нулю одновременно). Положим $\xi^i = \frac{y^i}{a}$, где a — произвольная константа, не равная нулю, построим по начальным условиям (113.3) соответствующую геодезическую, проходящую через M_0, а на ней точку M, отвечающую $\tau = a$. Это будет, как видно из (113.5), точка с наперед заданными римановыми координатами y^i.

Чтобы точка M действительно нашлась на геодезической, придется, возможно, ограничить выбор значений y^i некоторой окрестностью нуля.

Найденная точка M будет вполне определенной, несмотря на произвол в выборе константы a: если, например, константу a умножить на 2, то ξ^i разделится, а τ умножится на 2. Это означает лишь, что на прежней геодезической произведено преобразование канонического параметра

$$\tau^* = 2\tau,$$

причем точка M остается без изменения.

Координаты x^i точки M будут тем самым вполне определенными функциями от y^i:

$$x^i = x^i(y^1, \ \ldots, \ y^n). \tag{113.6}$$

Так как x^i согласно (90.8) — непрерывно дифференцируемые функции параметра τ и начальных значений ξ^i, то $\left(\text{полагая} \quad \xi^i = \dfrac{y^i}{a},\ \tau = a = \text{const}\right)$ убеждаемся, что функции (113.6) также непрерывно дифференцируемые. Остается показать, что

$$\frac{\partial(x^1, \ \ldots, \ x^n)}{\partial(y^1, \ \ldots, \ y^n)} \neq 0, \tag{113.7}$$

по крайней мере, в точке M_0. Это гарантирует однозначную разрешимость уравнений (113.6) относительно $y^1, \ \ldots, \ y^n$:

$$y^i = y^i(x^1, \ \ldots, \ x^n), \tag{113.8}$$

по крайней мере, в некоторой окрестности точки M_0, а следовательно, возможность принять y^i за новые координаты в пределах этой окрестности. Геометрически это означает, что в пределах этой окрестности в каждую точку M можно провести *одну и только одну геодезическую* из точки M_0 (по координатам x^i однозначно определяются y^i, а значит, и геодезическая, идущая из M_0 в M).

Чтобы доказать (113.7), вычислим производные $\dfrac{dx^i}{d\tau}$ вдоль произвольной геодезической, проходящей через M_0. Так как x^i зависят от $y^1, \ \ldots, \ y^n$ согласно (113.6), а y^i зависят от τ согласно (113.5), то мы получаем:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{dy^j}{d\tau} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\xi^j.$$

Применим это равенство в точке M_0. Пользуясь (113.3), получаем:

$$\xi^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)_0 \xi^j.$$

Так как ξ^i выбираются произвольно, то это равенство показывает, что $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)_0$ есть единичная матрица

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)_0 = \delta^i_j, \tag{113.9}$$

а тем самым

$$\mathrm{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|_0 = 1 \neq 0.$$

Это мы и хотели показать.

Построенные нами римановы координаты y^i зависят, конечно, от выбора начала M_0 и от выбора исходных координат x^i. Но зависимость от этих последних не очень существенна: *как бы ни преобразовывать координаты x^i, соответствующие римановы координаты y^i подвергаются линейному преобразованию*

$$y^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_0 y^i, \tag{113.10}$$

т. е. точно так же, как координаты контравариантного вектора в точке M_0. Это вытекает из того, что ξ^i и в самом деле есть контравариантный вектор в точке M_0 а y^i получаются из ξ^i умножением на значение τ (которое есть инвариант преобразования координат x^i).

Согласно (113.5) *параметрические уравнения геодезических, проходящих через начало M_0, в римановых координатах y^i становятся линейными по отношению к каноническому параметру τ:*

$$y^i = \xi^i \tau, \tag{113.11}$$

где коэффициенты ξ^i — постоянные для данной геодезической.

Очевидно, это свойство и *достаточно для того, чтобы координаты y^i были римановыми.* Действительно, если оно имеет место, то вдоль данной геодезической

$$\frac{dy^i}{d\tau} = \xi^i = \mathrm{const}. \tag{113.12}$$

В частности, это справедливо и для точки M_0, так что

$$\left(\frac{dy^i}{d\tau}\right)_0 = \xi^i.$$

Мы видим, что ξ^i в (113.11), так же как и в (113.5), представляют собой координаты начального касательного вектора. Тем самым из (113.11) следует, что y^i — римановы координаты (точнее, что римановы координаты, построенные, исходя из координат y^i, совпадают с ними самими).

Очевидно, римановы координаты в L_n^0 строятся весьма сходно с аффинными координатами в аффинном пространстве A_n, причем роль радиусов-векторов, идущих во все стороны из начала M_0, играют геодезические отрезки. Однако в A_n в аффинных координатах *все* прямые определяются линейными параметрическими уравнениями (если параметр канонический), а в L_n^0 в римановых координатах этим свойством обладают, вообще говоря, лишь геодезические, *проходящие через начало* M_0.

В частном случае, когда L_n^0 представляет собой A_n, римановы координаты, как легко проверить, просто совпадают с аффинными.

Выясним теперь, какими особенностями будут обладать коэффициенты связности Γ_{ij}^k *в римановых координатах* y^i. Рассмотрим геодезическую (113.11) и запишем, что текущие координаты удовлетворяют дифференциальному уравнению геодезических

$$\frac{d^2y^k}{d\tau^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dy^i}{d\tau}\frac{dy^j}{d\tau}. \tag{113.13}$$

Так как $\frac{dy^i}{d\tau} = \xi^i$, $\frac{d^2y^i}{d\tau^2} = 0$, то мы получаем:

$$\Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j = 0. \tag{113.14}$$

Умножая почленно на τ^2, получаем окончательно:

$$\Gamma_{ij}^k y^i y^j = 0. \tag{113.15}$$

Итак, в римановых координатах y^i *функции* $\Gamma_{ij}^k(y^1, \ldots, y^n)$ *удовлетворяют* n *соотношениям* (113.15). *Соотношения* (113.15) *являются и достаточными для того, чтобы координаты* y^i *были римановыми*. Действительно, пусть эти соотношения имеют место. Рассмотрим кривые, определяемые параметрическими уравнениями

$$y^i = \xi^i \tau, \tag{113.16}$$

где τ — некоторый параметр, а ξ^i — произвольные постоянные (не равные нулю одновременно). Мы утверждаем, что эти кривые будут геодезическими. В самом деле, подставляя $y^i = \xi^i\tau$ в дифференциальные уравнения геодезических, получаем:

$$0 = -\Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j.$$

Перепишем это равенство, пользуясь (113.16) (и исключив точку M_0, так что $\tau \neq 0$):

$$0 = -\frac{1}{\tau^2}\Gamma_{ij}^k y^i y^j.$$

Мы получили тождество, так как соотношения (113.15) у нас соблюдаются. Итак, кривые $y^i = \xi^i \tau$ — геодезические, отнесенные к каноническому параметру τ. Так как ξ^i — произвольные константы, то это будут геодезические, проходящие через начало M_0 во всевозможных направлениях. Но мы уже знаем, что когда уравнения таких геодезических имеют вид $y^i = \xi^i \tau$, то y^i — римановы координаты. Тем самым наше утверждение доказано.

Римановы координаты всегда являются в то же время геодезическими координатами относительно своего начала M_0. Для доказательства достаточно рассмотреть соотношение (113.14) в точке M_0:

$$(\Gamma^k_{ij})_0 \, \xi^i \xi^j = 0.$$

Так как геодезические $y^i = \xi^i \tau$ проходят через M_0 по любому направлению, то ξ^i можно брать в этом случае произвольно, и мы получаем тождество относительно ξ^i. Учитывая, что в L^0_n

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji},$$

мы должны аннулировать коэффициенты, т. е. положить:

$$(\Gamma^k_{ij})_0 = 0.$$

Это и значит, что координаты y^i — геодезические в точке M_0.

Обратное, конечно, неверно: римановы координаты гораздо более специализированы и выбираются с гораздо меньшим произволом, чем геодезические координаты.

Все сказанное выше будет справедливо, в частности, *для риманова пространства* V_n. Но при этом можно сделать ряд добавлений.

Для геодезических вещественной длины, проходящих через начало M_0, в качестве канонического параметра τ можно брать длину дуги s, отсчитываемую от M_0. *Тогда формулы* (113.5), *определяющие римановы координаты* y^i, *примут вид*

$$y^i = \xi^i s, \tag{113.17}$$

где

$$\xi^i = \left[\frac{dx^i}{ds}\right]_0 \tag{113.18}$$

— *единичный касательный вектор к геодезической в начале* M_0. Для геодезических мнимой длины, проходящих через M_0, можно положить:

$$\tau = \sigma \left(= \frac{s}{i} \right),$$

и наши формулы примут вид

$$y^i = \xi^i \sigma, \tag{113.19}$$

где

$$\xi^i = \left[\frac{dx^i}{d\sigma}\right]_0 \tag{113.20}$$

— *мнимоединичный* касательный вектор к геодезической в точке M_0. Лишь для изотропных геодезических канонический параметр τ остается по-прежнему неспециализированным.

Для простоты ограничимся собственным римановым пространством, когда все геодезические вещественной длины; формулы (113.17) можно считать уравнениями исходящих из M_0 геодезических в римановых координатах.

Так как ξ^i в (113.17) — единичный вектор в точке M_0, то

$$1 = g_{ij}^0 \xi^i \xi^j. \tag{113.21}$$

Здесь g_{ij}^0 — метрический тензор в точке M_0. Заметим кстати, что координаты всех тензоров в точке M_0 не меняются при переходе от первоначальных координат x^i к соответствующим римановым координатам y^i. Это легко следует из (113.9).

Умножая (113.21) на s^2, получаем:

$$s^2 = g_{ij}^0 y^i y^j. \tag{113.22}$$

Таким образом, квадрат геодезического расстояния $s = M_0M$ выражается квадратичной формой от римановых координат y^i точки M с коэффициентами g_{ij}^0.

Полагая здесь $s = \text{const}$, мы получаем уравнение геодезической гиперсферы в римановых координатах. В самом деле, геодезическая гиперсфера с центром в M_0 строится следующим образом: по всем геодезическим, исходящим из M_0, мы откладываем отрезки M_0M постоянной длины $s > 0$ и рассматриваем геометрическое место их концов M. При этом геодезические, исходящие из M_0, ортогонально пробивают гиперсферу (§ 102). Используем этот результат, чтобы охарактеризовать метрический тензор g_{ij} в римановых координатах.

Пусть δy^i обозначают дифференциалы координат y^i при произвольном бесконечно малом смещении из данной точки M по гиперсфере, а dy^i — по геодезической M_0M. В силу ортогональности геодезической к гиперсфере векторы δy^i и dy^i всегда ортогональны, так что

$$g_{ij} dy^i \delta y^j = 0,$$

где g_{ij} вычислены в точке M. Так как согласно (113.17) $dy^i = \xi^i ds$, то отсюда следует:

$$g_{ij} \xi^i \delta y^j = 0. \tag{113.23}$$

С другой стороны, дифференцируя почленно (113.22) при бесконечно малом смещении по гиперсфере ($s = \text{const}$), мы получаем:

$$0 = 2g_{ij}^0 y^i \delta y^j,$$

откуда после деления на $2s$ следует:

$$g_{ij}^0 \xi^i \delta y^j = 0. \qquad (113.24)$$

Так как δy^j связаны лишь этой линейной зависимостью, вытекающей из уравнения гиперсферы, то линейная зависимость (113.23) должна быть ее следствием. Это означает пропорциональность коэффициентов

$$g_{ij}\xi^i = \lambda g_{ij}^0 \xi^i, \qquad (113.25)$$

где λ — коэффициент пропорциональности. Нетрудно обнаружить, что $\lambda = 1$. Для этого достаточно свернуть полученное равенство с ξ^j почленно. Получим:

$$g_{ij}\xi^i\xi^j = \lambda g_{ij}^0 \xi^i \xi^j.$$

Так как вдоль геодезической (113.17) касательный вектор

$$\frac{dy^i}{ds} = \xi^i$$

является *в каждой точке M единичным*, то

$$g_{ij}\xi^i\xi^j = 1. \qquad (113.26)$$

Учитывая, кроме того, (113.21), получаем, что $\lambda = 1$. Теперь (113.25) принимает вид

$$g_{ij}\xi^i = g_{ij}^0 \xi^i, \qquad (113.27)$$

т. е. вдоль геодезической (113.17) *остаются постоянными не только* ξ^i, *но и* $\xi_j = g_{ij}\xi^i$.

Умножая почленно на s, получаем окончательно:

$$g_{ij}y^i = g_{ij}^0 y^i. \qquad (113.28)$$

Итак, функции $g_{ij}(y^1, \ldots, y^n)$, *вычисленные в римановых координатах, тождественно удовлетворяют* n *соотношениям* (113.28) (*где* $g_{ij}^0 = g_{ij}(0, \ldots, 0)$). *Покажем, что эти соотношения являются и достаточными для того, чтобы координаты* y^i *были римановыми.*

В самом деле, пусть в некоторой координатной системе соотношения (113.28) имеют место. Покажем, что в этом случае имеют место и соотношения (113.15), откуда и будет следовать, что координаты y^i римановы.

Дифференцируя (113.28) по y^k почленно, получим:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} y^i + g_{kj} = g^0_{kj}.$$

Свернем полученное равенство поочередно с y^j и y^k. Получим соответственно:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} y^i y^j = 0, \\ &\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} y^i y^k = 0. \end{aligned}\right\} \tag{113.29}$$

При этом мы отбросили в правой и левой частях члены, равные в силу (113.28). Последнее равенство перепишем два раза с другими обозначениями индексов:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} y^i y^j = 0, \qquad \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} y^i y^j = 0.$$

Складывая полученные равенства почленно и вычитая из них первое из (113.29), мы приходим (в силу (94.8)) к соотношению

$$\Gamma_{k,ij} y^i y^j = 0.$$

Поднимая индекс k при помощи метрического тензора, мы возвращаемся к (113.15). Требуемое доказано.

Мы упоминали о связи римановых координат с полугеодезическими. Эту связь легко обнаружить, если ввести новые переменные

$$u^1 = \frac{y^1}{y^n}, \quad u^2 = \frac{y^2}{y^n}, \ldots, u^{n-1} = \frac{y^{n-1}}{y^n},$$

предполагая, что мы ограничиваемся областью, где $y^n > 0$. Очевидно, вдоль геодезических, исходящих из начала M_0, значения $u^1, \ldots, u^{n-1}$ остаются постоянными, и обратно, эти геодезические вполне определяются значениями $u^1, \ldots, u^{n-1}$. Присоединим к параметрам $u^1, \ldots, u^{n-1}$ еще путь $s = \overset{\frown}{M_0 M} > 0$, пройденный по геодезической из M_0 в произвольную точку M (в области $y^n > 0$). Тогда $u^1, \ldots, u^{n-1}$, s в совокупности определяют положение точки M и являются частным случаем полугеодезических координат (§ 103).

Разумеется, все сделанное в этом параграфе может быть повторено (с соответствующими оговорками и уточнениями) и для псевдориманова пространства.