§ 114. Кривизна риманова пространства в данной точке и данном двумерном направлении как кривизна геодезической поверхности

Мы дадим еще одно геометрическое истолкование кривизны многомерного пространства V_n. Для простоты ограничимся собственно римановым случаем.

Берем какую-нибудь точку M_0 и двумерную плоскость A_2, через нее проходящую, т. е. множество векторов, линейно зависящих от двух, неколлинеарных векторов, заданных в точке M_0. По направлению каждого такого вектора проведем через M_0 геодезическую. Геометрическое место этих геодезических дает двумерную поверхность $\mathfrak{M}_2$, которая называется геодезической поверхностью с центром M_0 (рис. 30). Очевидно, что $\mathfrak{M}_2$ имеет A_2 касательной плоскостью в точке M_0.

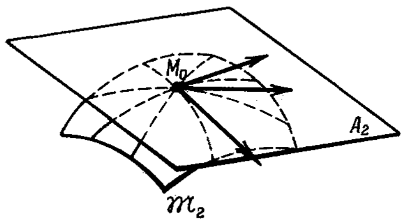

Рис. 30.

Вычислим в точке M_0 кривизну $\mathfrak{M}_2$ как двумерного риманова пространства. Мы утверждаем, что эта кривизна совпадает с кривизной пространства V_n в той же точке в направлении плоскости A_2.

Воспользуемся римановыми координатами x^i с началом в точке M_0 (§ 113). В них, как известно, уравнения геодезических имеют вид

$$x^i = \xi^i s,$$

где ξ^i — единичный касательный вектор в точке M_0. Так как римановы координаты в точке M_0 будут и геодезическими, то имеем:

$$(\Gamma^k_{ij})_0 = 0,$$

и значит (согласно (94.5) и (94.7)):

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)_0 = 0. \qquad (114.1)$$

Возьмем теперь в качестве A_2 плоскость векторов с координатами $(\xi^1, \xi^2, 0, \ldots, 0)$, где ξ^1, ξ^2 произвольны. Все эти векторы линейно зависят от двух из них, например, от $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ и $(0, 1, 0, \ldots, 0)$. Такой выбор A_2 не нарушает общности выводов. В самом деле, линейным преобразованием с постоянными коэффициентами $x^{i'} = a^{i'}_i x^i$ мы переводим римановы координаты снова в римановы. В то же время этим преобразованием всегда можно добиться, что любые два вектора получат координаты $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ и $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, и следовательно, построенная на них плоскость A_2 превратится в плоскость векторов с координатами $(\xi^1, \xi^2, 0, \ldots, 0)$.

Строим теперь геодезическую поверхность, касающуюся в точке M_0 плоскости A_2. С этой целью проводим геодезическую по направлению каждого вектора ξ^i плоскости A_2. Но тогда все $\xi^i = 0$ кроме ξ^1 и ξ^2. Следовательно, согласно уравнениям геодезических $x^i = \xi^i s$, вдоль них все $x^i = 0$ кроме x^1, x^2, т. е. наши геодезические все лежат на координатной поверхности x^1, x^2, с которой и совпадает построенная нами геодезическая поверхность $\mathfrak{M}_2$ (по крайней мере в окрестности точки M_0).

Переходим к вычислению внутренней кривизны поверхности x^1, x^2. Мы будем рассматривать ее как двумерное риманово пространство, отнесенное к координатам x^1, x^2 (игнорируя остальные координаты, все время равные на ней нулю). Мы утверждаем теперь, что x^1, x^2 будут служить римановыми координатами с точки зрения внутренней геометрии этой поверхности. Действительно, поверхность образована геодезическими, уравнения которых были

$$x^i = \xi^i s,$$

при $\xi^3 = \xi^4 = \ldots = \xi^n = 0$. Это — геодезические, т. е. линии стационарной длины во вмещающем пространстве V_n, а следовательно, они и подавно обладают этим свойством на поверхности $\mathfrak{M}_2$. Итак, геодезические на поверхности $\mathfrak{M}_2$, выходящие из начала M_0, имеют уравнения:

$$x^1 = \xi^1 s, \qquad x^2 = \xi^2 s,$$

где ξ^1, ξ^2 — постоянные вдоль каждой из них, а это и означает, что координаты x^1, x^2 — римановы для поверхности $\mathfrak{M}_2$ (§ 113).

Возьмем теперь линейный элемент вмещающего пространства V_n при бесконечно малом смещении по поверхности x^1, x^2. Так как при этом $dx^3 = dx^4 = \ldots = dx^n = 0$, то от квадратичной формы $g_{ij} dx^i dx^j$ в пространстве остается лишь

$$ds^2 = g_{11} dx^{1^2} + 2g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} dx^{2^2}. \tag{114.2}$$

Эта квадратичная форма и определяет, таким образом, внутреннюю геометрию на поверхности x^1, x^2. Кривизна этой геометрии согласно (112.2) равна

$$\frac{\tilde{R}_{12,\,12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

где $\tilde{R}_{12,\,12}$ — координата тензора кривизны, составленного для квадратичной формы (114.2).

Нам нужно доказать совпадение в точке M_0 этой кривизны поверхности с кривизной вмещающего пространства V_n в направлении этой же поверхности. Так как последняя кривизна равна $\dfrac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$ согласно (111.15), то остается доказать равенство

$$\tilde{R}_{12,12}=R_{12,12}.$$

Координаты $x^1, \ldots, x^n$ для всего пространства и x^1, x^2 для поверхности суть римановы координаты, значит, коэффициенты связности Γ^k_{ij} в обеих геометриях обращаются в нуль в начале координат M_0. Следовательно, формула (110.4) для $R_{lk,ij}$ упрощается, так как отпадают члены с Γ^k_{ij}. Выписав эту формулу для $R_{12,12}$, получаем:

$$(R_{12,12})_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\,\partial x^2}-\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\,\partial x^1}-\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\,\partial x^2}+\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\,\partial x^2}\right).$$

Но если выписать эту же формулу для $\tilde{R}_{12,12}$, то результат будет буквально тот же, так как g_{11}, g_{12}, g_{22} на поверхности те же самые, что и в пространстве, если вычислять их в точках поверхности; частные производные от них берутся по тем же переменным x^1, x^2.

Итак,

$$(\tilde{R}_{12,12})_0=(R_{12,12})_0,$$

а вместе с тем *кривизна геодезической двумерной поверхности в ее центре M_0 дает кривизну пространства в этой точке в касательном к поверхности направлении.*

§ 115. Смешанные тензоры на гиперповерхности V_{n-1} в V_n

В римановом пространстве V_n можно развить теорию гиперповерхностей V_{n-1}, весьма схожую с теорией поверхностей в обычном пространстве. Это объясняется тем, что поверхность в обычном пространстве есть частный случай гиперповерхности. Напротив, теория поверхностей V_m любого числа измерений m имеет значительно более сложный вид; ее мы не будем касаться.

Говоря о гиперповерхности V_{n-1}, мы подразумеваем, что она неизотропная и, следовательно, также несет на себе риманову геометрию (§ 85) (в собственно римановом случае эта оговорка является излишней). Пусть V_{n-1} задана уравнениями

$$x^i=x^i(u^1, \ldots, u^{n-1}), \tag{115.1}$$

причем согласно нашим прежним предположениям (см. § 83) матрица $\left\|\dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right\|$ имеет ранг $n-1$. Линейно независимые векторы $\dfrac{\partial x^i}{\partial u^1}, \ldots, \dfrac{\partial x^i}{\partial u^{n-1}}$