Нам нужно доказать совпадение в точке M_0 этой кривизны поверхности с кривизной вмещающего пространства V_n в направлении этой же поверхности. Так как последняя кривизна равна $\frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$ согласно (111.15), то остается доказать равенство

$$\tilde{R}_{12,12}=R_{12,12}.$$

Координаты $x^1, \ldots, x^n$ для всего пространства и x^1, x^2 для поверхности суть римановы координаты, значит, коэффициенты связности Γ^k_{ij} в обеих геометриях обращаются в нуль в начале координат M_0. Следовательно, формула (110.4) для $R_{lk,ij}$ упрощается, так как отпадают члены с Γ^k_{ij}. Выписав эту формулу для $R_{12,12}$, получаем:

$$(R_{12,12})_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\,\partial x^2}-\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\,\partial x^1}-\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\,\partial x^2}+\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1\,\partial x^2}\right).$$

Но если выписать эту же формулу для $\tilde{R}_{12,12}$, то результат будет буквально тот же, так как g_{11}, g_{12}, g_{22} на поверхности те же самые, что и в пространстве, если вычислять их в точках поверхности; частные производные от них берутся по тем же переменным x^1, x^2.

Итак,

$$(\tilde{R}_{12,12})_0=(R_{12,12})_0,$$

а вместе с тем *кривизна геодезической двумерной поверхности в ее центре M_0 дает кривизну пространства в этой точке в касательном к поверхности направлении.*

§ 115. Смешанные тензоры на гиперповерхности V_{n-1} в V_n

В римановом пространстве V_n можно развить теорию гиперповерхностей V_{n-1}, весьма схожую с теорией поверхностей в обычном пространстве. Это объясняется тем, что поверхность в обычном пространстве есть частный случай гиперповерхности. Напротив, теория поверхностей V_m любого числа измерений m имеет значительно более сложный вид; ее мы не будем касаться.

Говоря о гиперповерхности V_{n-1}, мы подразумеваем, что она неизотропная и, следовательно, также несет на себе риманову геометрию (§ 85) (в собственно римановом случае эта оговорка является излишней). Пусть V_{n-1} задана уравнениями

$$x^i=x^i(u^1, \ldots, u^{n-1}), \tag{115.1}$$

причем согласно нашим прежним предположениям (см. § 83) матрица $\left\|\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right\|$ имеет ранг $n-1$. Линейно независимые векторы $\frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial x^i}{\partial u^{n-1}}$

определяют в каждой точке M гиперповерхности V_{n-1} касательную гиперплоскость A_{n-1} (лежащую в касательном пространстве A_n в точке M). Прямая B_1, ортогональная к A_{n-1} в A_n и проходящая через M, называется *нормалью.* Нормаль не принадлежит A_{n-1}, так как иначе A_{n-1} была бы изотропной гиперплоскостью вопреки нашим предположениям.

Метрический тензор на гиперповерхности V_{n-1} имеет вид (85.12):

$$G_{\alpha\beta}=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}g_{ij} \tag{115.2}$$

(греческие индексы здесь и в дальнейшем пробегают значения $1, 2, \ldots, n-1$). Тензору $G_{\alpha\beta}$ отвечает инвариантная квадратичная форма $G_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta$, которую мы будем называть первой основной квадратичной формой на гиперповерхности V_{n-1} и которая согласно (85.13) выражает ds^2:

$$ds^2=G_{\alpha\beta}(u^1, \ldots, u^{n-1})\,du^\alpha\,du^\beta.$$

Как и в обычной теории поверхностей, нам дальше придется наряду с первой рассматривать вторую основную квадратичную форму.

Подготовим теперь аппарат смешанных тензоров, которым будем пользоваться в дальнейшем. Рассмотрим систему величин

$$\xi^i_\alpha=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\end{pmatrix} \tag{115.3}$$

в произвольной точке M гиперповерхности V_{n-1}. Эти величины занумерованы двумя индексами. Из них латинский индекс относится к вмещающему пространству V_n и реагирует на преобразование координат x^i в нем как контравариантный индекс:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial u^\alpha}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad \xi^{i'}_\alpha=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\xi^i_\alpha.$$

Греческий индекс относится к гиперповерхности V_{n-1} и реагирует на преобразование координат u^α на ней как ковариантный индекс:

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^{\alpha'}}=\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad \xi^i_{\alpha'}=\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}}\xi^i_\alpha.$$

Индекс α не реагирует на преобразование координат x^i в V_n, равно как индекс i не реагирует на преобразование координат u^α на V_{n-1}.

Систему величин ξ^i_α мы будем называть смешанным тензором одноконтравариантным в V_n и одноковариантным в V_{n-1}.

Совершенно аналогичным образом в точках V_{n-1} могут быть определены смешанные тензоры любого строения, например, $Z^{ij\alpha}_{\beta k}$. Мы будем подразумевать при такой записи, что индексы i, j, k ведут себя как тензорные индексы при преобразовании координат x^i в V_n (и не реагируют на преобразование координат u^α), а индексы α, β ведут себя как тензорные индексы при преобразовании координат u^α на V_{n-1} (и не реагируют на преобразование x^i в V_n). «Чистые» тензоры, например, Z^i_{jk} или Z^α_β, мы будем рассматривать как частный случай смешанных; первый из них ведет себя как инвариант при преобразованиях u^α, а второй — при преобразованиях x^i.

Таким образом, смешанный тензор имеет частью индексы, относящиеся к риманову пространству V_n (латинские индексы, реагирующие на преобразование координат x^i), частью индексы, относящиеся к риманову пространству V_{n-1} (греческие индексы, реагирующие на преобразование координат u^α). Операции тензорной алгебры — сложение, умножение, свертывание тензоров — очевидным образом переносятся и на смешанные тензоры. Все рассуждения повторяются дословно, и нужно лишь учитывать, что индексы будут относиться частью к одному пространству, частью к другому.

Пусть теперь нам дано поле смешанного тензора на V_{n-1}, например,

$$Z^{i\alpha}_\beta = Z^{i\alpha}_\beta(u^1, \ldots, u^{n-1}). \qquad (115.4)$$

В таком случае при бесконечно малом смещении по V_{n-1} мы определяем абсолютный дифференциал этого тензора по формуле

$$DZ^{i\alpha}_\beta = dZ^{i\alpha}_\beta + \Gamma^i_{kp} Z^{p\alpha}_\beta dx^k + \overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\varkappa\pi} Z^{i\pi}_\beta du^\varkappa - \overset{*}{\Gamma}{}^\pi_{\varkappa\beta} Z^{i\alpha}_\pi du^\varkappa. \qquad (115.5)$$

Для наглядности мы выписали абсолютный дифференциал тензора частного вида, но формулу (115.5) нужно понимать в смысле общего правила: *абсолютный дифференциал любого смешанного тензора получается путем добавления к обыкновенному дифференциалу дополнительных членов, составленных по одному для каждого индекса данного тензора по ранее известным нам правилам. Однако при этом члены, отвечающие греческим индексам, составляются при помощи $\overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}$ (а не Γ^k_{ij}), где $\overset{*}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}$ — коэффициенты связности, вычисленные в римановом пространстве V_{n-1} (исходя из метрического тензора $G_{\alpha\beta}$). Соответственно свертывание в этих членах происходит с $du^\varkappa$ (а не с dx^k).* Очевидно, в случае «чистого» тензора, например, Z^{ij}_k или $Z^{\alpha\beta}_\gamma$, мы получаем *абсолютный дифференциал в прежнем смысле:*

в первом случае вычисленный в римановом пространстве V_n, а во втором случае — в римановом пространстве V_{n-1}. В общем же случае, когда смешанный тензор снабжен и латинскими (относящимися к V_n) и греческими (относящимися к V_{n-1}) индексами, определенное нами абсолютное дифференцирование происходит как бы частью в V_n (по латинским индексам), частью в V_{n-1} (по греческим индексам).

Нужно, конечно, убедиться, что определенный таким образом абсолютный дифференциал представляет собой тензор. Рассмотрим для этой цели сначала преобразование координат x^i. Первые два члена в правой части (115.5) представляют собой абсолютный дифференциал тензора $Z_\beta^{i\alpha}$ в V_n, если индексы α, β произвольно фиксировать, а тензорным индексом считать лишь i. Оставшиеся члены каждый по отдельности тоже ведут себя при этих условиях как тензоры с контравариантным индексом i.

Таким образом, $DZ_\beta^{i\alpha}$ представляет собой (при фиксированных α, β) одноконтравариантный тензор в V_n.

Теперь рассмотрим преобразование координат u^α на V_{n-1}. Тогда, объединяя $dZ_\beta^{i\alpha}$ с последними двумя членами, мы получаем абсолютный дифференциал тензора $Z_\beta^{i\alpha}$ в римановом пространстве V_{n-1} (если считать индекс i произвольно фиксированным). Следовательно, при нашем преобразовании индексы α, β в полученной сумме ведут себя как тензорные индексы. Так же они ведут себя и в пропущенном нами втором члене. Следовательно, $DZ_\beta^{i\alpha}$ при произвольно фиксированном i представляет собой тензор с точки зрения пространства V_{n-1}.

Этим мы проверили, что $DZ_\beta^{i\alpha}$ — тензор того же строения, что и $Z_\beta^{i\alpha}$.

В точности то же рассуждение применимо и для смешанного тензора $Z_{\cdots}^{\cdots}$ любого строения: при преобразовании x^i мы объединяем $dZ_{\cdots}^{\cdots}$ с дополнительными членами, отвечающими латинским индексам, а при преобразовании u^α — с дополнительными членами, отвечающими греческим индексам. В обоих случаях обнаруживается, что $DZ_{\cdots}^{\cdots}$ преобразуется по тензорному закону.

Установленные нами правила абсолютного дифференцирования суммы, произведения, свертки тензоров без труда переносятся и на смешанные тензоры повторением прежних рассуждений.

От абсолютного дифференциала нетрудно перейти к абсолютным производным смешанного тензора по $u^\varkappa$. Дифференцируя (115.4) и (115.1), получаем:

$$dZ_\beta^{i\alpha} = \frac{\partial Z_\beta^{i\alpha}}{\partial u^\varkappa} du^\varkappa, \quad dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial u^\varkappa} du^\varkappa = \xi_\varkappa^k du^\varkappa.$$

Теперь (115.5) принимает вид

$$DZ_{\beta}^{i\alpha}=\left(\frac{\partial Z_{\beta}^{i\alpha}}{\partial u^{\varkappa}}+\xi_{\varkappa}^{k}\Gamma_{kp}^{i}Z_{\beta}^{p\alpha}+\overset{*}{\Gamma}{}_{\varkappa\pi}^{\alpha}Z_{\beta}^{i\pi}-\overset{*}{\Gamma}{}_{\varkappa\beta}^{\pi}Z_{\pi}^{i\alpha}\right)du^{\varkappa}.$$

Коэффициенты при $du^{\varkappa}$ мы будем называть абсолютными производными смешанного тензора по $u^{\varkappa}$; в нашем примере

$$\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z_{\beta}^{i\alpha}=\frac{\partial Z_{\beta}^{i\alpha}}{\partial u^{\varkappa}}+\xi_{\varkappa}^{k}\Gamma_{kp}^{i}Z_{\beta}^{p\alpha}+\overset{*}{\Gamma}{}_{\varkappa\pi}^{\alpha}Z_{\beta}^{i\pi}-\overset{*}{\Gamma}{}_{\varkappa\beta}^{\pi}Z_{\pi}^{i\alpha}. \qquad (115.6)$$

Мы сопровождаем символ абсолютной производной $\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}$ звездочкой, потому что она берется по координатам $u^{\varkappa}$ в V_{n-1} (а не по x^k в V_n). Формулу (115.6), выписанную для частного случая, нужно понимать в смысле общего правила: обыкновенная частная производная $\frac{\partial Z_{\cdots}^{\cdots}}{\partial u^{\varkappa}}$ дополняется членами, по одному для каждого индекса тензора $Z_{\cdots}^{\cdots}$; для греческих индексов эти члены составляются так же, как при абсолютном дифференцировании в V_{n-1}, а для латинских — как при абсолютном дифференцировании в V_n, причем в последнем случае индекс дифференцирования k свертывается с $\xi_{\varkappa}^{k}$.

Из тензорного характера $DZ_{\beta}^{i\alpha}$ легко следует, что абсолютная производная $\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z_{\beta}^{i\alpha}$ тоже представляет собой тензор, причем по сравнению с исходным тензором она обладает лишним ковариантным греческим индексом. Чтобы убедиться в этом, достаточно записать:

$$DZ_{\beta}^{i\alpha}=du^{\varkappa}\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z_{\beta}^{i\alpha} \qquad (115.7)$$

и применить при преобразовании координат u^{α} то же рассуждение, что и при выводе (96.22). При преобразовании же координат x^i тензорный характер $DZ_{\beta}^{i\alpha}$ позволяет нам записать:

$$DZ_{\beta}^{i'\alpha}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}DZ_{\beta}^{i\alpha}, \text{ т. е. } du^{\varkappa}\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z_{\beta}^{i'\alpha}=du^{\varkappa}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z_{\beta}^{i\alpha},$$

а так как $du^{\varkappa}$ совершенно произвольны, то отсюда вытекает:

$$\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z_{\beta}^{i'\alpha}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z_{\beta}^{i\alpha},$$

т. е. при преобразовании x^i $\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z_{\beta}^{i\alpha}$ тоже ведет себя как тензор (по отношению к латинским индексам). Разумеется, все сказанное без труда переносится на тензор $Z_{\cdots}^{\cdots}$ любого строения.

Займемся теперь альтернированным вторым абсолютным дифференциалом (§ 105). На гиперповерхности V_{n-1} зададимся (по образцу (105.2)) произвольной двумерной поверхностью $\mathfrak{M}_2$

$$u^\mu = u^\mu(\alpha, \beta),$$

причем, как и в § 105, бесконечно малым смещениям по координатной линии α отвечают символы дифференциалов d и D, а по координатной линии β — символы $\tilde{d}$ и $\tilde{D}$.

Пусть на V_{n-1} заданы «чистые» тензорные поля U_i и W^q. Индексы у них латинские, т. е. реагируют на преобразование координат x^i в V_n. Применяя формулы (105.9) и (105.14), можно записать:

$$\tilde{D}DU_i - D\tilde{D}U_i = R_{lk,i\cdot}{}^{q} U_q \tilde{d}x^l\, dx^k, \tag{115.8}$$

$$\tilde{D}DW^q - D\tilde{D}W^q = -R_{lk,\,i\cdot}{}^{q} W^i \tilde{d}x^l\, dx^k. \tag{115.9}$$

Пусть, далее, на V_{n-1} заданы «чистые» тензорные поля p_ϱ, q^σ. Индексы у них греческие, т. е. реагируют на преобразование координат u^λ на V_{n-1}. Так как в этом случае абсолютные дифференциалы D и $\tilde{D}$ имеют смысл абсолютных дифференциалов в римановом пространстве V_{n-1}, то мы можем снова применить формулы (105.9), (105.14) уже в V_{n-1}:

$$\tilde{D}Dp_\varrho - D\tilde{D}p_\varrho = \overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\varrho\cdot}{}^{\sigma} p_\sigma \tilde{d}u^\lambda\, du^\varkappa, \tag{115.10}$$

$$\tilde{D}Dq^\sigma - D\tilde{D}q^\sigma = -\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\varrho\cdot}{}^{\sigma} q^\varrho \tilde{d}u^\lambda\, du^\varkappa. \tag{115.11}$$

Здесь через $\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\varrho\cdot}{}^{\sigma}$ обозначен тензор кривизны пространства V_{n-1}.

Если теперь на V_{n-1} задать поле произвольного смешанного тензора, например, $Z_j^{i\alpha}$, то для него мы получаем:

$$\tilde{D}DZ_j^{i\alpha} - D\tilde{D}Z_j^{i\alpha} = -R_{lk,\,p\cdot}{}^{i} Z_j^{p\alpha} \tilde{d}x^l\, dx^k + \\ + R_{lk,\,j\cdot}{}^{p} Z_p^{i\alpha} \tilde{d}x^l\, dx^k - \overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\pi\cdot}{}^{\alpha} Z_j^{i\pi} \tilde{d}u^\lambda\, du^\varkappa. \tag{115.12}$$

Эту формулу нужно понимать в смысле общего правила: *альтернированный второй абсолютный дифференциал смешанного тензора выражается суммой членов, составленных по одному для каждого из его индексов: для латинских — по схеме* (115.8) *или* (115.9) (*в зависимости от ко- или контравариантного характера индекса*), *для греческих — по схеме* (115.10) *или* (115.11). Остальные индексы переписываются каждый раз без изменения.

Вывод этой формулы совершается по образцу § 105, а именно, заданный смешанный тензор, например, $Z_\beta^{i\alpha}$, превращаем (аналогично (105.15)) в инвариант I путем свертывания с произвольными одновалентными тензорными полями:

$$I = Z_\beta^{i\alpha} v_i p_\alpha q^\beta.$$

Здесь v_i, p_α, q^β — произвольные тензорные поля на V_{n-1}. Повторяя дальнейший вывод § 105 и пользуясь формулами (115.8) — (115.11), приходим к (115.12).

Наконец, нам нужно получить еще *формулы для альтернированной второй абсолютной производной смешанного тензора*. Здесь мы будем поступать по образцу § 108 — вывод формулы (108.14) (разумеется, Γ^k_{ij} и $\overset{*}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}$ как коэффициенты связности в римановых пространствах удовлетворяют условию (108.1) — симметрии по нижним индексам).

Прежде всего записываем (115.7) для произвольного смешанного тензора $Z^{\cdots}_{\cdots}$

$$DZ^{\cdots}_{\cdots} = du^\varkappa \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^{\cdots}_{\cdots}.$$

Действуем почленно посредством $\tilde{D}$:

$$\tilde{D}DZ^{\cdots}_{\cdots} = \tilde{D}\,du^\varkappa \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^{\cdots}_{\cdots} + du^\varkappa \tilde{d}u^\lambda \overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^{\cdots}_{\cdots}. \qquad (115.13)$$

Во втором члене $\tilde{D}\overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^{\cdots}_{\cdots}$ заменено на основании той же формулы (115.7). Так как

$$\tilde{D}\,du^\varkappa = \tilde{d}\,du^\varkappa + \overset{*}{\Gamma}{}^\varkappa_{\lambda\pi}\,du^\pi \tilde{d}u^\lambda,$$
$$D\tilde{d}u^\varkappa = d\,\tilde{d}u^\varkappa + \overset{*}{\Gamma}{}^\varkappa_{\lambda\pi}\tilde{d}u^\pi\,du^\lambda,$$

то совершенно аналогично (108.11) получаем:

$$\tilde{D}\,du^\varkappa = D\tilde{d}u^\varkappa. \qquad (115.14)$$

Теперь в (115.13) меняем местами символы D и $\tilde{D}$ (и соответственно d и $\tilde{d}$) и результат почленно вычитаем. Учитывая (115.14), получаем:

$$\tilde{D}DZ^{\cdots}_{\cdots} - D\tilde{D}Z^{\cdots}_{\cdots} = du^\varkappa\,\tilde{d}u^\lambda \overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^{\cdots}_{\cdots} - \tilde{d}u^\varkappa\,du^\lambda \overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^{\cdots}_{\cdots} =$$
$$= du^\varkappa\,\tilde{d}u^\lambda\,(\overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^{\cdots}_{\cdots} - \overset{*}{\nabla}_\varkappa \overset{*}{\nabla}_\lambda Z^{\cdots}_{\cdots}). \qquad (115.15)$$

Последнее выражение получено за счет перестановки обозначений $\varkappa$ и λ в вычитаемом.

Применим полученный результат к тензору $Z^{i\alpha}_j$. Подставим в (115.12)

$$\tilde{d}x^l = \frac{\partial x^l}{\partial u^\lambda}\tilde{d}u^\lambda = \xi^l_\lambda \tilde{d}u^\lambda, \quad dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial u^\varkappa}du^\varkappa = \xi^k_\varkappa\,du^\varkappa.$$

Приравнивая затем правые части (115.15) и (115.12) и учитывая, что равенство имеет место при любых $\tilde{d}u^\lambda$, $du^\varkappa$, получим:

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^{i\alpha}_j - \overset{*}{\nabla}_\varkappa \overset{*}{\nabla}_\lambda Z^{i\alpha}_j =$$
$$= -R_{lk,p\cdot}^{\cdot\cdot\cdot i} Z^{p\alpha}_j \xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa + R_{lk,j\cdot}^{\cdot\cdot\cdot p} Z^{i\alpha}_p \xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa - \overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\pi\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} Z^{i\pi}_j, \qquad (115.16)$$

т. е. соответствующие коэффициенты при $\bar{d}u^{\lambda}$, $du^{\varkappa}$ тоже должны быть равны. Полученную формулу нужно понимать как правило составления *альтернированной второй абсолютной производной от произвольного смешанного тензора*. А именно, каждому латинскому индексу тензора в правой части отвечает член, составленный по схеме (108.14) в случае нижнего и по схеме (108.16) в случае верхнего индекса, причем индексы дифференцирования подвергаются еще свертыванию с $\xi^k_{\varkappa}\xi^l_{\lambda}$:

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}_{\lambda}\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z^i-\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}\overset{*}{\nabla}_{\lambda}Z^i &= -R_{lk.\,p}^{\;\;\;\;\,i}Z^p\xi^l_{\lambda}\xi^k_{\varkappa}, \\ \overset{*}{\nabla}_{\lambda}\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z_j-\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}\overset{*}{\nabla}_{\lambda}Z_j &= R_{lk.\,j}^{\;\;\;\;\,p}Z_p\xi^l_{\lambda}\xi^k_{\varkappa}. \end{aligned}\right\} \qquad (115.17)$$

Каждому греческому индексу отвечает член, составленный тоже по схеме (108.14) или (108.16), но уже в применении к риманову пространству V_{n-1}.

Это отражается в записи заменой латинских индексов греческими, а также тем, что тензор кривизны, взятый в V_{n-1}, отмечается звездочкой:

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}_{\lambda}\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z^{\alpha}-\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}\overset{*}{\nabla}_{\lambda}Z^{\alpha} &= -\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa.\,\pi}^{\;\;\;\;\;\alpha}Z^{\pi}, \\ \overset{*}{\nabla}_{\lambda}\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}Z_{\beta}-\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}\overset{*}{\nabla}_{\lambda}Z_{\beta} &= \overset{*}{R}_{\lambda\varkappa.\,\beta}^{\;\;\;\;\;\pi}Z_{\pi}. \end{aligned}\right\} \qquad (115.18)$$

Мы выписали формулы для одновалентных тензоров. Правило (115.16) означает, что для каждого индекса смешанного тензора нужно составить в правой части член по одной из схем (115.17), (115.18), причем остальные индексы тензора переписываются каждый раз без изменения.

Все сделанное нами в этом параграфе для гиперповерхностей V_{n-1} без изменений переносится на поверхности V_m любого числа измерений. Мы ограничились гиперповерхностями, так как намерены заниматься именно их дифференциальной геометрией.

§ 116. Теория гиперповерхностей V_{n-1} в V_n

Сохраняя предположения и обозначения § 115, применим развитый там аппарат смешанных тензоров к дифференциальной геометрии гиперповерхностей V_{n-1}.

В каждой точке M гиперповерхности V_{n-1} построим репер, состоящий из n векторов:

$$\xi^i_1,\ \ldots,\ \xi^i_{n-1},\ \nu^i, \qquad (116.1)$$

где $\xi^i_1,\ \ldots,\ \xi^i_{n-1}$ — линейно независимые касательные векторы (115.3), а вектор ν^i — единичный (или мнимоединичный) нормальный вектор. Этот вектор линейно независим от векторов $\xi^i_1,\ \ldots,\ \xi^i_{n-1}$,