т. е. соответствующие коэффициенты при $\bar{d}u^\lambda$, $du^\varkappa$ тоже должны быть равны. Полученную формулу нужно понимать как правило составления *альтернированной второй абсолютной производной от произвольного смешанного тензора*. А именно, каждому латинскому индексу тензора в правой части отвечает член, составленный по схеме (108.14) в случае нижнего и по схеме (108.16) в случае верхнего индекса, причем индексы дифференцирования подвергаются еще свертыванию с $\xi^k_\varkappa \xi^l_\lambda$:

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^i - \overset{*}{\nabla}_\varkappa \overset{*}{\nabla}_\lambda Z^i &= -R_{lk.\,p.}^{\;\;\;\;\;i} Z^p \xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa, \\ \overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z_j - \overset{*}{\nabla}_\varkappa \overset{*}{\nabla}_\lambda Z_j &= R_{lk.\,j.}^{\;\;\;\;\;p} Z_p \xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa. \end{aligned}\right\} \tag{115.17}$$

Каждому греческому индексу отвечает член, составленный тоже по схеме (108.14) или (108.16), но уже в применении к риманову пространству V_{n-1}.

Это отражается в записи заменой латинских индексов греческими, а также тем, что тензор кривизны, взятый в V_{n-1}, отмечается звездочкой:

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z^\alpha - \overset{*}{\nabla}_\varkappa \overset{*}{\nabla}_\lambda Z^\alpha &= -\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa.\,\pi.}^{\;\;\;\;\;\alpha} Z^\pi, \\ \overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa Z_\beta - \overset{*}{\nabla}_\varkappa \overset{*}{\nabla}_\lambda Z_\beta &= \overset{*}{R}_{\lambda\varkappa.\,\beta.}^{\;\;\;\;\;\pi} Z_\pi. \end{aligned}\right\} \tag{115.18}$$

Мы выписали формулы для одновалентных тензоров. Правило (115.16) означает, что для каждого индекса смешанного тензора нужно составить в правой части член по одной из схем (115.17), (115.18), причем остальные индексы тензора переписываются каждый раз без изменения.

Все сделанное нами в этом параграфе для гиперповерхностей V_{n-1} без изменений переносится на поверхности V_m любого числа измерений. Мы ограничились гиперповерхностями, так как намерены заниматься именно их дифференциальной геометрией.

§ 116. Теория гиперповерхностей V_{n-1} в V_n

Сохраняя предположения и обозначения § 115, применим развитый там аппарат смешанных тензоров к дифференциальной геометрии гиперповерхностей V_{n-1}.

В каждой точке M гиперповерхности V_{n-1} построим репер, состоящий из n векторов:

$$\xi^i_1, \ \ldots, \ \xi^i_{n-1}, \ \nu^i, \tag{116.1}$$

где $\xi^i_1, \ \ldots, \ \xi^i_{n-1}$ — линейно независимые касательные векторы (115.3), а вектор ν^i — единичный (или мнимоединичный) нормальный вектор. Этот вектор линейно независим от векторов $\xi^i_1, \ \ldots, \ \xi^i_{n-1}$, так как в противном случае нормаль ν^i лежала бы в касательной гиперплоскости A_{n-1}, что исключено (см. начало § 115). Таким образом, векторы (116.1) действительно образуют репер, который мы будем называть *сопровождающим репером* гиперповерхности. Сопровождающий репер зависит, конечно, от выбора координат u^α на V_{n-1}.

Для изучения гиперповерхности V_{n-1} важно проследить, как меняется сопровождающий репер от точки к точке. Мы сделаем это при бесконечно малом смещении данной точки M по V_{n-1}, т. е. будем дифференцировать величины ξ^i_α, ν^i и притом в следующей инвариантной форме. Вычислим прежде всего абсолютную производную от смешанного тензора ξ^i_α (по схеме (115.6)):

$$\overset{*}{\nabla}_\beta \xi^i_\alpha = \frac{\partial \xi^i_\alpha}{\partial u^\beta} + \xi^k_\beta \Gamma^i_{kp}\,\xi^p_\alpha - \overset{*}{\Gamma}{}^\pi_{\beta\alpha}\,\xi^i_\pi.$$

Так как $\dfrac{\partial \xi^i_\alpha}{\partial u^\beta} = \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}$, а Γ^i_{kp}, $\overset{*}{\Gamma}{}^\pi_{\beta\alpha}$ симметричны по нижним индексам, то, очевидно,

$$\overset{*}{\nabla}_\beta \xi^i_\alpha = \overset{*}{\nabla}_\alpha \xi^i_\beta. \qquad (116.2)$$

При фиксированных α, β $\overset{*}{\nabla}_\beta \xi^i_\alpha$ представляет собой одноконтравариантный тензор, т. е. вектор в V_n. Мы утверждаем, что этот вектор ортогонален ко всем векторам ξ^i_σ, т. е. направлен по нормали к V_{n-1}. В самом деле, согласно (115.2)

$$G_{\alpha\beta} = \xi^i_\alpha\,\xi^j_\beta g_{ij}. \qquad (116.3)$$

Вычисляя почленно абсолютный дифференциал, получим:

$$DG_{\alpha\beta} = (D\xi^i_\alpha)\,\xi^j_\beta g_{ij} + \xi^i_\alpha\,(D\xi^j_\beta)\,g_{ij} + \xi^i_\alpha\,\xi^j_\beta Dg_{ij}.$$

Так как $DG_{\alpha\beta}$ совпадает с абсолютным дифференциалом в V_{n-1}, а Dg_{ij} — с абсолютным дифференциалом в V_n, то оба они равны нулю (как абсолютные дифференциалы от метрических тензоров). Заменяя $D\xi^i_\alpha$ через $\overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^i_\alpha\,du^\varkappa$ и учитывая, что $du^\varkappa$ произвольны, получаем:

$$(\overset{*}{\nabla}_\varkappa\,\xi^i_\alpha)\,\xi^j_\beta g_{ij} + (\overset{*}{\nabla}_\varkappa\,\xi^j_\beta)\,\xi^i_\alpha g_{ij} = 0.$$

Присоединим сюда еще два соотношения, полученных из этого круговой подстановкой индексов:

$$(\overset{*}{\nabla}_\alpha\,\xi^i_\beta)\,\xi^j_\varkappa g_{ij} + (\overset{*}{\nabla}_\alpha\,\xi^j_\varkappa)\,\xi^i_\beta g_{ij} = 0,$$
$$(\overset{*}{\nabla}_\beta\,\xi^i_\varkappa)\,\xi^j_\alpha g_{ij} + (\overset{*}{\nabla}_\beta\,\xi^j_\alpha)\,\xi^i_\varkappa g_{ij} = 0.$$

Учитывая (116.2), мы замечаем, что здесь приравниваются нулю три попарные суммы *трех* величин, а следовательно, каждая из этих величин равна нулю:

$$(\overset{*}{\nabla}_\alpha \xi^i_\beta)\, \xi^j_\varkappa g_{ij} = 0.$$

Итак, вектор $\overset{*}{\nabla}_\alpha \xi^i_\beta$ ортогонален ко всем векторам $\xi^j_\varkappa$ и направлен по нормали к V_{n-1}. Мы можем записать, таким образом,

$$\overset{*}{\nabla}_\alpha \xi^i_\beta = b_{\alpha\beta} \nu^i. \tag{116.4}$$

Коэффициенты $b_{\alpha\beta}$ образуют дважды ковариантный тензор на V_{n-1}, так как при преобразовании координат u^α индексы α, β в левой части равенства ведут себя как ковариантные тензорные индексы. Кроме того, в силу (116.2)

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}.$$

Тензор $b_{\alpha\beta}$ мы будем называть вторым основным тензором гиперповерхности V_{n-1} (считая первым метрический тензор $G_{\alpha\beta}$), а отвечающую ему инвариантную квадратичную форму $b_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta$ — второй основной квадратичной формой на V_{n-1}.

Итак, мы выразили при помощи тензора $b_{\alpha\beta}$ абсолютные производные $\overset{*}{\nabla}_\alpha \xi^i_\beta$; выразим теперь $\overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i$. Для этой цели запишем ортогональность ν^i к любому касательному вектору ξ^i_α

$$g_{ij} \nu^i \xi^j_\alpha = 0. \tag{116.5}$$

Беря почленно абсолютную производную $\overset{*}{\nabla}_\varkappa$ и учитывая, что $\overset{*}{\nabla}_\varkappa g_{ij} = 0$ (так как $Dg_{ij} = \overset{*}{\nabla}_\varkappa g_{ij}\, du^\varkappa = 0$), получим:

$$g_{ij} (\overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i)\, \xi^j_\alpha + g_{ij} \nu^i \overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^j_\alpha = 0.$$

Заменяя $\overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^j_\alpha$ согласно (116.4) и учитывая, что вектор ν^i единичный или мнимоединичный, т. е.

$$g_{ij} \nu^i \nu^j = \pm 1, \tag{116.6}$$

получаем:

$$g_{ij} (\overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i)\, \xi^j_\alpha = \mp b_{\varkappa\alpha} \tag{116.7}$$

(во всех дальнейших выкладках верхний знак будет соответствовать единичному, а нижний — мнимоединичному вектору ν^i). Дифференцируя аналогичным образом (116.6), получаем:

$$g_{ij} \overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i \nu^j + g_{ij} \nu^i \overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^j = 0,$$

а так как оба члена левой части равны между собой, то окончательно:

$$g_{ij}\overset{*}{\nabla}_\varkappa v^i v^j = 0. \tag{116.8}$$

Это показывает, что вектор $\overset{*}{\nabla}_\varkappa v^i$ (где $\varkappa$ фиксировано) ортогонален к вектору v^i, расположен в касательной гиперплоскости и может быть разложен по векторам $\xi_1^i, \ldots, \xi_{n-1}^i$:

$$\overset{*}{\nabla}_\varkappa v^i = c_\varkappa^\sigma \xi_\sigma^i. \tag{116.9}$$

Здесь $c_\varkappa^\sigma$ — некоторые коэффициенты, которые нетрудно подсчитать. Вставляя это разложение в (116.7) и пользуясь (116.3), получаем:

$$G_{\sigma\alpha} c_\varkappa^\sigma = \mp b_{\varkappa\alpha},$$

или, что то же,

$$c_\varkappa^\sigma = \mp b_\varkappa^\sigma,$$

где $b_\varkappa^\sigma$ получается из $b_{\varkappa\alpha}$ поднятием индекса α при помощи метрического тензора $G_{\alpha\beta}$ на V_{n-1}. Теперь (116.9) принимает окончательный вид

$$\overset{*}{\nabla}_\varkappa v^i = \mp b_\varkappa^\sigma \xi_\sigma^i. \tag{116.10}$$

Присоединим сюда и формулы (116.4):

$$\overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi_\beta^i = b_{\varkappa\beta} v^i. \tag{116.11}$$

Формулы (116.10), (116.11) *называются деривационными формулами теории гиперповерхностей; они выражают абсолютные производные от тензоров* ξ_α^i, v^i *через сами эти тензоры, или, говоря геометрически, характеризуют в бесконечно малом изменение векторов сопровождающего репера, отнесенное к самому этому реперу.*

Мы можем вывести теперь весьма важные соотношения, связывающие первую и вторую квадратичные формы на гиперповерхности, т. е. тензоры $G_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$. А именно, *рассматривая деривационные формулы как систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций* $\xi_\beta^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$, $v^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$, *мы составим для нее условия интегрируемости.* При этом остальные функции от $u^1, \ldots, u^{n-1}$, входящие в эти уравнения, мы будем рассматривать как известные.

Мы видим, что уравнения (116.10), (116.11) позволяют выразить каждую частную производную 1-го порядка от каждой неизвестной функции v^i, ξ_β^i через сами эти функции. Действительно, абсолютные производные $\overset{*}{\nabla}_\varkappa v^i$, $\overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^i_\beta$ имеют в своем составе частные производные $\frac{\partial v^i}{\partial u^\varkappa}$, $\frac{\partial \xi^i_\beta}{\partial u^\varkappa}$ (а также дополнительные члены, содержащие v^i, ξ^i_β), так что из (116.10), (116.11) можно выразить все производные

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v^i}{\partial u^\varkappa} &= \ldots, \\ \frac{\partial \xi^i_\beta}{\partial u^\varkappa} &= \ldots \end{aligned}\right\} \tag{116.12}$$

Многоточиями обозначены правые части полученных дифференциальных уравнений, содержащие неизвестные функции v^i, ξ^i_β лишь в конечном виде. Мы знаем, что для составления условий интегрируемости этой системы нужно продифференцировать почленно ее уравнения по u^λ, заменить появившиеся в правых частях частные производные от неизвестных функций согласно (116.12) и проальтернировать по $\varkappa$, λ. Левые части обращаются в нуль, и мы получаем конечные зависимости, наложенные на неизвестные функции. Это и будут условия интегрируемости. Мы предпочтем, однако, провести эту выкладку инвариантным путем и вместо частных производных иметь дело с абсолютными производными. Возьмем от (116.11) почленно абсолютную производную $\overset{*}{\nabla}_\lambda$:

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^i_\beta = \overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta} \cdot v^i + b_{\varkappa\beta} \overset{*}{\nabla}_\lambda v^i.$$

Заменим в правой части $\overset{*}{\nabla}_\lambda v^i$ согласно (116.10), т. е. из уравнений самой системы:

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^i_\beta = \overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta} \cdot v^i \mp b_{\varkappa\beta} b^\sigma_\lambda \xi^i_\sigma.$$

Теперь меняем местами индексы λ, $\varkappa$ и полученное равенство почленно вычитаем из данного. В левой части мы теперь уже не получим нуля; альтернированная вторая абсолютная производная смешанного тензора выражается по схеме (115.16). Мы приходим к конечным зависимостям, наложенным на неизвестные функции ξ^i_α, v^i:

$$\begin{aligned} -R_{lk,\,p\cdot}^{\;\;\;\;\;\;\;i}\,\xi^p_\beta \xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa + \overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\cdot}^{\;\;\;\;\;\;\;\sigma}\,\xi^i_\sigma &= \\ &= (\overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta} - \overset{*}{\nabla}_\varkappa b_{\lambda\beta}) v^i \mp (b_{\varkappa\beta} b^\sigma_\lambda - b_{\lambda\beta} b^\sigma_\varkappa) \xi^i_\sigma. \end{aligned} \tag{116.13}$$

Это и будут условия интегрируемости в части, касающейся уравнений (116.11). Заметим, что использование абсолютных производных вместо частных изменило выкладки лишь по форме. По существу мы получили бы то же самое, исходя и из уравнений (116.12), но только значительно более сложным путем. Действительно, в обоих случаях смысл выкладки остается прежним: исключить из продифференцированных уравнений системы вторые частные производные, заменить первые частные производные из уравнений самой системы и этим путем получить конечные зависимости между неизвестными функциями ξ^i_α, v^i.

Теперь составим условия интегрируемости уравнений (116.10). Возьмем почленно абсолютную производную $\overset{*}{\nabla}_\lambda$:

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa v^i = \mp \overset{*}{\nabla}_\lambda b^\sigma_\varkappa \cdot \xi^i_\sigma \mp b^\sigma_\varkappa \overset{*}{\nabla}_\lambda \xi^i_\sigma.$$

Заменяя $\overset{*}{\nabla}_\lambda \xi^i_\sigma$ согласно (116.11), т. е. из уравнений самой системы, получим:

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda \overset{*}{\nabla}_\varkappa v^i = \mp \overset{*}{\nabla}_\lambda b^\sigma_\varkappa \cdot \xi^i_\sigma \mp b^\sigma_\varkappa b_{\lambda\sigma} v^i.$$

Альтернируем по индексам λ, $\varkappa$ и левую часть заменяем согласно (115.16):

$$-R_{lk,\,p}^{\cdot\cdot\;\cdot i}v^p \xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa = \mp (\overset{*}{\nabla}_\lambda b^\sigma_\varkappa - \nabla_\varkappa b^\sigma_\lambda)\xi^i_\sigma. \qquad (116.14)$$

Последний член при альтернации исчез, так как тензор

$$b^\sigma_\varkappa b_{\lambda\sigma} = G^{\tau\sigma} b_{\varkappa\tau} b_{\lambda\sigma}$$

симметричен по индексам $\varkappa$ и λ.

Условия интегрируемости (116.13), (116.14) можно записать в более четкой форме. Фиксируя в (116.13) индексы λ, $\varkappa$, β и оставляя переменным лишь индекс i, можно считать, что члены левой и правой части — векторы в V_n. Умножая обе части равенства скалярно на каждый из векторов сопровождающего репера (116.1), получим n равенств, очевидно, равносильных прежним. Умножая скалярно на ξ^j_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$, т. е. свертывая с $g_{ij}\xi^j_\alpha$, получим (пользуясь (116.3), (116.5), (116.6) и замечая, что у тензора кривизны R индекс i опускается при помощи g_{ij}, а у $\overset{*}{R}$ индекс σ — при помощи $G_{\sigma\alpha}$):

$$-R_{lk,\,pj}\xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa \xi^p_\beta \xi^j_\alpha + \overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\alpha} = \mp (b_{\varkappa\beta} b_{\lambda\alpha} - b_{\lambda\beta} b_{\varkappa\alpha}),$$

или окончательно:

$$\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\alpha} = R_{lk,\,pj}\xi^l_\lambda \xi^k_\varkappa \xi^p_\beta \xi^j_\alpha \pm (b_{\lambda\beta} b_{\varkappa\alpha} - b_{\varkappa\beta} b_{\lambda\alpha}). \qquad (116.15)$$

Умножая (116.13) скалярно на ν^j, т. е. свертывая с $g_{ij}\nu^j$, получим:

$$-R_{lk,\ pj}\xi^l_\lambda\xi^k_\varkappa\xi^p_\beta\nu^j = \pm(\overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta} - \overset{*}{\nabla}_\varkappa b_{\lambda\beta}). \tag{116.16}$$

Теперь поступим так же с уравнениями (116.14). Свертывая с $g_{ij}\xi^j_\beta$, приходим к соотношению

$$-R_{lk,\ pj}\xi^l_\lambda\xi^k_\varkappa\nu^p\xi^j_\beta = \mp(\overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta} - \overset{*}{\nabla}_\varkappa b_{\lambda\beta}).$$

Это соотношение отличается от (116.16) лишь тем, что обе его части умножены на -1 (чтобы убедиться в этом, достаточно в левой части переставить обозначения индексов суммирования p, j; тогда $R_{lk,\ jp} = -R_{lk,\ pj}$, в остальном же левые части будут одинаковы).

Далее, свертывая (116.14) почленно с $g_{ij}\nu^j$, приходим к тождеству, так как в обеих частях получаются нули (в самом деле, $R_{lk,\ pj}\nu^p\nu^j = 0$ в силу косой симметрии $R_{lk,\ pj}$ по индексам p, j). *Итак, условия интегрируемости системы* (116.10), (116.11) *исчерпываются уравнениями* (116.15), (116.16). Из них (116.15) называются *уравнениями Гаусса*, а (116.16) — *Петерсона — Кодацци*. Смысл уравнений Гаусса заключается в том, что они обнаруживают структуру тензора кривизны $\overset{*}{R}$ на гиперповерхности V_{n-1}, а именно, этот тензор состоит из двух слагаемых: одно представляет собой как бы «проекцию» на V_{n-1} тензора кривизны R во вмещающем пространстве V_n; в этой части кривизна римановой метрики на V_{n-1} вынуждена просто тем обстоятельством, что V_{n-1} вмещено в обладающее кривизной пространство V_n. Другое слагаемое выражается через второй основной тензор гиперповерхности $b_{\alpha\beta}$, и в этой части кривизна римановой метрики связана с искривленностью самой гиперповерхности V_{n-1} в V_n.

Что касается уравнений Петерсона—Кодацци, то они показывают, как связано уклонение тензора $\overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta}$ от симметрии по всем индексам (по индексам $\varkappa$, β он симметричен) с кривизной вмещающего пространства.

Формально мы получили уравнения Гаусса и Петерсона—Кодацци как условия интегрируемости системы (116.10), (116.11). Однако с геометрической точки зрения рассмотрение такой системы с неизвестными функциями $\xi^i_\beta(u^1, \ldots, u^{n-1})$, $\nu^i(u_1, \ldots, u^{n-1})$ не имеет смысла. В самом деле, для этого нужно считать *известными* функциями от $u^1, \ldots, u^{n-1}$ не только $G_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$, но и входящие в состав абсолютных производных $\overset{*}{\nabla}_\varkappa\nu^i$, $\overset{*}{\nabla}_\varkappa\xi^i_\beta$ коэффициенты связности Γ^k_{ij} *вмещающего пространства* V_n. Но чтобы знать вдоль гиперповерхности V_{n-1} коэффициенты Γ^k_{ij} как функции от $u^1, \ldots, u^{n-1}$, нужно знать, как именно V_{n-1} вложено в V_n, а тогда и ξ^i_β, ν^i приходится считать известными функциями, и задача теряет смысл. *Поэтому с геометрической точки зрения выделение в уравнениях* (116.10), (116.11) ξ^i_β, ν^i *как неизвестных функций носит условный характер и никакой геометрической задачи не выражает.*

Однако в важном частном случае, когда вмещающее пространство V_n является евклидовым, дело обстоит иначе. К этому случаю мы сейчас и переходим.

§ 117. Теория гиперповерхностей V_{n-1} в R_n

Если вмещающее пространство V_n является евклидовым пространством R_n, то его тензор кривизны тождественно равен нулю:

$$R_{kl,\,pj}=0. \tag{117.1}$$

Уравнения Гаусса (116.15) и *Петерсона—Кодацци* (116.16) принимают простой вид

$$\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\alpha}=\pm(b_{\lambda\beta}b_{\varkappa\alpha}-b_{\varkappa\beta}b_{\lambda\alpha}), \tag{117.2}$$

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta}=\overset{*}{\nabla}_\varkappa b_{\lambda\beta}. \tag{117.3}$$

Таким образом, тензор кривизны на гиперповерхности V_{n-1} полностью выражается через второй основной тензор гиперповерхности, а тензор $\overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta}$ будет симметричен по всем индексам. Замечательно, что в рассматриваемом случае условия интегрируемости не содержат неизвестных функций ξ^i_α, ν^i.

В частности, при $n=3$ мы имеем дело с двумерной поверхностью V_2 в R_3; из числа уравнений (117.2) будет лишь одно существенное

$$\overset{*}{R}_{12,\,12}=\pm(b_{11}b_{22}-b_{12}^2), \tag{117.4}$$

а остальные или будут его следствиями, или обращаются в тождества (греческие индексы могут принимать значения лишь 1, 2). Если R_3 — собственно евклидово (т. е. обычное) пространство, то ν^i всегда единичный (а не мнимоединичный) вектор, и в (117.4) следует брать знак $+$. Пользуясь формулой (112.2) в применении к двумерной римановой геометрии на V_2, мы получаем:

$$\overset{*}{K}=\frac{\overset{*}{R}_{12,\,12}}{G_{11}G_{22}-G_{12}^2}=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{G_{11}G_{12}-G_{12}^2}. \tag{117.5}$$