нужно знать, как именно V_{n-1} вложено в V_n, а тогда и ξ^i_β, ν^i приходится считать известными функциями, и задача теряет смысл. *Поэтому с геометрической точки зрения выделение в уравнениях* (116.10), (116.11) ξ^i_β, ν^i *как неизвестных функций носит условный характер и никакой геометрической задачи не выражает.*

Однако в важном частном случае, когда вмещающее пространство V_n является евклидовым, дело обстоит иначе. К этому случаю мы сейчас и переходим.

§ 117. Теория гиперповерхностей V_{n-1} в R_n

Если вмещающее пространство V_n является евклидовым пространством R_n, то его тензор кривизны тождественно равен нулю:

$$R_{kl,\,pj}=0. \tag{117.1}$$

Уравнения Гаусса (116.15) и *Петерсона—Кодацци* (116.16) принимают простой вид

$$\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\alpha}=\pm(b_{\lambda\beta}b_{\varkappa\alpha}-b_{\varkappa\beta}b_{\lambda\alpha}), \tag{117.2}$$

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta}=\overset{*}{\nabla}_\varkappa b_{\lambda\beta}. \tag{117.3}$$

Таким образом, тензор кривизны на гиперповерхности V_{n-1} полностью выражается через второй основной тензор гиперповерхности, а тензор $\overset{*}{\nabla}_\lambda b_{\varkappa\beta}$ будет симметричен по всем индексам. Замечательно, что в рассматриваемом случае условия интегрируемости не содержат неизвестных функций ξ^i_α, ν^i.

В частности, при $n=3$ мы имеем дело с двумерной поверхностью V_2 в R_3; из числа уравнений (117.2) будет лишь одно существенное

$$\overset{*}{R}_{12,\,12}=\pm(b_{11}b_{22}-b_{12}^2), \tag{117.4}$$

а остальные или будут его следствиями, или обращаются в тождества (греческие индексы могут принимать значения лишь 1, 2). Если R_3—собственно евклидово (т. е. обычное) пространство, то ν^i всегда единичный (а не мнимоединичный) вектор, и в (117.4) следует брать знак $+$. Пользуясь формулой (112.2) в применении к двумерной римановой геометрии на V_2, мы получаем:

$$\overset{*}{K}=\frac{\overset{*}{R}_{12,\,12}}{G_{11}G_{22}-G_{12}^2}=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{G_{11}G_{12}-G_{12}^2}. \tag{117.5}$$

Таким образом, кривизна $\overset{*}{K}$ двумерного риманова пространства V_2 совпадает с отношением дискриминантов второй и первой квадратичных форм на V_2. Как показывается в курсах дифференциальной геометрии, это означает, что кривизна $\overset{*}{K}$ совпадает с полной (или гауссовой) кривизной поверхности V_2 и может быть определена внешним образом как произведение главных кривизн поверхности V_2 в данной точке.

Возвращаемся к общему случаю $V_{n-1} \subset R_n$. Уравнения (117.2), (117.3) выражают зависимость, необходимо имеющую место между тензорами $G_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ на V_{n-1}. При этом не нужно забывать, что $\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\alpha}$ есть тензор кривизны для римановой метрики $G_{\alpha\beta}$ и, следовательно, выражается через координаты $G_{\alpha\beta}$ и их частные производные 1-го и 2-го порядков. В результате (117.2) представляют собой относительно $G_{\alpha\beta}$ дифференциальные уравнения 2-го порядка, причем $b_{\alpha\beta}$ входят в них в конечном виде. Равным образом (117.3) представляют собой относительно $G_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ дифференциальные уравнения 1-го порядка, причем $G_{\alpha\beta}$ входят через коэффициенты связности $\overset{*}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ в абсолютных производных.

Как оказывается, уравнения (117.2), (117.3) не только необходимы, но и *достаточны* для того, чтобы тензоры $G_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ способны были служить первым и вторым основными тензорами некоторой гиперповерхности V_{n-1}. Говоря точнее, имеет место следующая теорема.

Пусть в некотором $n-1$-мерном римановом пространстве V_{n-1}, представляющем собой односвязное элементарное многообразие и отнесенном к координатам $u^1, \ldots, u^{n-1}$, задан помимо метрического тензора $G_{\alpha\beta}$ тензор $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$, удовлетворяющий соотношениям (117.2), (117.3) (где $\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\alpha}$ — тензор кривизны, а $\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}$ — символ абсолютного дифференцирования в V_{n-1}). *Тогда V_{n-1} можно реализовать в виде гиперповерхности в некотором евклидовом пространстве R_n, так что $G_{\alpha\beta}$ будет служить на этой гиперповерхности первым, а $b_{\alpha\beta}$ — вторым основным тензором. Эта гиперповерхность определяется с точностью до движений в R_n.* Характер самого R_n определяется тем, что в его ортонормированном репере по сравнению с ортонормированным репером в V_{n-1} будет на единицу больше *единичных* векторов, если в (117.2) имеет место знак $+$, и *мнимоединичных* векторов, если имеет место знак $-$.

Переходя к доказательству, *предположим* сначала, что искомая гиперповерхность существует. Отнесем евклидово пространство R_n к аффинным координатам x^i. В таком случае во всех точках

$$\Gamma^k_{ij} = 0. \tag{117.6}$$

Перепишем уравнения (116.10), (116.11):

$$\left.\begin{aligned}\overset{*}{\nabla}_\varkappa v^i &= \mp b^\sigma_\varkappa \xi^i_\sigma,\\ \overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^i_\beta &= b_{\varkappa\beta} v^i.\end{aligned}\right\} \qquad (117.7)$$

Вследствие $\Gamma^k_{ij}=0$ в составе абсолютных производных выпадают члены, отвечающие индексу i:

$$\overset{*}{\nabla}_\varkappa v^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^\varkappa}, \qquad \overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^i_\beta = \frac{\partial \xi^i_\beta}{\partial u^\varkappa} - \overset{*}{\Gamma}{}^\sigma_{\varkappa\beta}\, \xi^i_\sigma. \qquad (117.8)$$

Будем рассматривать в уравнениях (117.7) v^i, ξ^i_β как неизвестные функции от $u^1, \ldots, u^{n-1}$. Тогда, записывая абсолютные производные в развернутом виде (117.8), мы убеждаемся, что все остальные функции, входящие в уравнения, т. е. $b_{\varkappa\beta}$, $b^\sigma_\varkappa$, $\overset{*}{\Gamma}{}^\sigma_{\varkappa\beta}$, нам известны, так как выражаются через заданные нам по условию теоремы тензоры $G_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$.

Условия интегрируемости системы (117.7) мы первоначально получили в виде (116.15), (116.16), но учитывая, что сейчас у нас $\Gamma^k_{ij}=0$, а следовательно, и $R_{kl,\,pj}=0$, мы получаем упрощенные условия интегрируемости (117.2), (117.3). По условию теоремы нам дано, что они удовлетворяются, и притом, очевидно, тождественно относительно неизвестных функций v^i, ξ^i_β (поскольку эти функции вовсе в них не входят).

В результате система (117.7) является *вполне интегрируемой*, т. е. допускает решение с произвольно заданными начальными значениями неизвестных функций

$$\xi^i_\beta = (\xi^i_\beta)_0, \quad v^i = (v^i)_0 \quad \text{при} \quad u^\alpha = u^\alpha_0, \qquad (117.9)$$

где u^α_0 — произвольно выбранная точка области изменения переменных u^α. В силу общей теории можно утверждать существование решения лишь в некоторой окрестности начальных значений аргументов u^α_0. Но учитывая, что система (117.7) является сверх всего прочего *линейной* (относительно неизвестных функций и их производных), можно показать, что решение, определяемое начальными значениями (117.9), существует во всей области изменения переменных $u^1, \ldots, u^{n-1}$. При этом играет важную роль односвязность пространства V_{n-1} (а следовательно, и области изменения $u^1, \ldots, u^{n-1}$), оговоренная в условии теоремы. Действительно, в противном случае решение могло бы оказаться многозначным, т. е. зависеть в некоторых случаях от пути перехода из начальной точки u^α_0 в произвольную точку u^α. В случае односвязности V_{n-1} два любых таких пути можно непрерывным образом перевести один в другой, а при этом для вполне интегрируемой системы значения искомых функций в конечной точке пути не меняются.

Начальные значения (117.9) необходимо подчинить — в силу (116.3), (116.5), (116.6) — соотношениям

$$g_{ij}(\xi^i_\alpha)_0(\xi^j_\beta)_0=(G_{\alpha\beta})_0,\quad g_{ij}(\nu^i)_0(\xi^j_\alpha)_0=0,\quad g_{ij}(\nu^i)_0(\nu^j)_0=\pm 1,\qquad (117.10)$$

где g_{ij} — *постоянные* координаты метрического тензора во вмещающем евклидовом пространстве R_n (в аффинных координатах x^i).

Для простоты возьмем в качестве аффинного репера в R_n сопровождающий репер $\xi^i_1, \ldots, \xi^i_{n-1}$, ν^i в начальной точке $M_0(u^\alpha_0)$ искомой гиперповерхности V_{n-1}. Это означает, что координаты векторов $(\xi^i_1)_0, \ldots, (\xi^i_{n-1})_0$, $(\nu^i)_0$ будут равны единице или нулю в зависимости от того, совпадает или нет номер координаты с номером вектора:

$$(\xi^i_\alpha)_0=\delta^i_\alpha,\quad (\nu^i)_0=\delta^i_n.$$

Тогда соотношения (117.10) принимают вид

$$g_{\alpha\beta}=(G_{\alpha\beta})_0,\quad g_{\alpha n}=0,\quad g_{nn}=\pm 1,\qquad (117.11)$$

т. е. мы получаем в нашем репере определенные значения координат метрического тензора g_{ij} во вмещающем евклидовом пространстве R_n.

Начальные условия (117.9) можно теперь переписать:

$$\xi^i_\alpha=\delta^i_\alpha,\quad \nu^i=\delta^i_n\quad \text{при}\quad u^\alpha=u^\alpha_0.\qquad (117.12)$$

Так как, кроме того, начало координат помещено в точке $M_0(u^\alpha_0)$, то текущие координаты $x^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$ удовлетворяют начальным условиям

$$x^i=0\quad \text{при}\quad u^\alpha=u^\alpha_0.\qquad (117.13)$$

Мы рассуждали до сих пор *предположительно*, считая, что искомая гиперповерхность существует. Мы убедились, что для такой гиперповерхности функции $\nu^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$, $\xi^i_\beta(u^1, \ldots, u^{n-1})$ необходимо удовлетворяют вполне интегрируемой системе (117.7). Кроме того, за счет выбора аффинного репера во вмещающем пространстве R_n всегда можно добиться, чтобы имели место начальные условия (117.12), (117.13); при этом метрический тензор в R_n принимает вид (117.11).

Теперь мы отбрасываем предположение о существовании искомой гиперповерхности V_{n-1} и фактически ее строим. Прежде всего зададимся евклидовым пространством R_n и в нем таким аффинным репером, чтобы координаты метрического тензора имели вид (117.11).

Для этого достаточно выбрать в аффинном пространстве A_n произвольный аффинный репер, а затем превратить A_n в евклидово пространство R_n, вводя метрический тензор с координатами (117.11) относительно этого репера. В этом пространстве мы и будем строить гиперповерхность V_{n-1}.

Ищем ξ^i_β, ν^i как функции от $u^1, \ldots, u^{n-1}$, удовлетворяющие системе (117.7) и начальным условиям (117.12). Ввиду полной интегрируемости системы эти функции существуют и определяются единственным образом. Кроме того, в силу линейности системы и односвязности V_{n-1} они будут однозначно определены во всей области изменения $u^1, \ldots, u^{n-1}$. Итак, в R_n построены векторы $\xi^i_1, \ldots \xi^i_{n-1}$, ν^i как функции от $u^1, \ldots, u^{n-1}$.

Ищем теперь параметрические уравнения гиперповерхности

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^{n-1}).$$

В случае существования искомой гиперповерхности функции $x^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$ необходимо должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = \xi^i_\alpha(u^1, \ldots, u^{n-1}) \qquad (117.14)$$

по самому определению величин ξ^i_α. Чтобы система (117.14) была совместной, необходимо и достаточно соблюдение условий интегрируемости, которые в данном случае имеют тривиальный вид:

$$\frac{\partial \xi^i_\alpha}{\partial u^\beta} = \frac{\partial \xi^i_\beta}{\partial u^\beta}. \qquad (117.15)$$

Очевидно, эти условия соблюдаются: функции ξ^i_β удовлетворяют уравнениям (117.7), а так как $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$, то

$$\overset{*}{\nabla}_\alpha \xi^i_\beta = \overset{*}{\nabla}_\beta \xi^i_\alpha.$$

Записывая абсолютные производные в развернутом виде (117.8) и принимая во внимание симметрию $\overset{*}{\Gamma}{}^\sigma_{\alpha\beta}$ по нижним индексам, легко убеждаемся в справедливости соотношений (117.15).

Следовательно, функции $x^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$, удовлетворяющие (117.14), существуют (и тоже, как легко показать, во всей области изменения $u^1, \ldots, u^{n-1}$). При этом они определяются с точностью до аддитивных констант, которые, однако, мы найдем из начальных условий (117.13). Остается проверить, что уравнения

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^{n-1}) \qquad (117.16)$$

действительно определяют *искомую* гиперповерхность. Покажем прежде всего, что функции $\xi^i_\alpha(u^1, \ldots, u^{n-1})$, $\nu^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$

удовлетворяют соотношениям

$$g^{ij} = \xi^i_\alpha \xi^j_\beta G^{\alpha\beta} \pm \nu^i \nu^j. \tag{117.17}$$

Действительно, в начальной точке u^α_0 эти соотношения имеют место, так как (после подстановки $\xi^i_\alpha = \delta^i_\alpha$, $\nu^i = \delta^i_n$) они принимают вид

$$g^{\lambda\mu} = (G^{\lambda\mu})_0, \quad g^{\lambda n} = 0, \quad g^{nn} = \pm 1, \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

а эти равенства имеют место как следствие (117.11).

Теперь достаточно показать, что правые части (117.17) представляют собой константы: так как равенства (117.17) имеют место в начальной точке u^α_0 и их левые части тоже константы, то равенства будут верны в этом случае в любой точке.

Вычислим абсолютную производную от правой части (117.17):

$$\overset{*}{\nabla}_\varkappa(\xi^i_\alpha \xi^j_\beta G^{\alpha\beta} \pm \nu^i \nu^j) = \overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^i_\alpha \cdot \xi^j_\beta G^{\alpha\beta} + \xi^i_\alpha \overset{*}{\nabla}_\varkappa \xi^j_\beta G^{\alpha\beta} \pm \overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i \cdot \nu^j \pm \nu^i \nabla_\varkappa \nu^j =$$
$$= b_{\varkappa\alpha} \nu^i \xi^j_\beta G^{\alpha\beta} + b_{\varkappa\beta} \nu^j \xi^i_\alpha G^{\alpha\beta} - b^\alpha_\varkappa \xi^i_\alpha \nu^j - b^\beta_\varkappa \xi^j_\beta \nu^i = 0.$$

Мы воспользовались здесь уравнениями (117.7), которым удовлетворяют функции ξ^i_α, ν^i.

Так как правая часть (117.17) представляет собой дважды контравариантный тензор в R_n (индексы i, j), вычисленный в *аффинных* координатах x^i, то ее абсолютные производные $\overset{*}{\nabla}_\varkappa$ совпадают с частными производными $\frac{\partial}{\partial u^\varkappa}$ (индексам i, j отвечают дополнительные члены с Γ^k_{ij}, которые в данном случае исчезают вследствие $\Gamma^k_{ij} = 0$). В результате все ее частные производные оказываются равными нулю и мы имеем константу. Это мы и хотели показать. Итак, соотношения (117.17) имеют место. Мы хотим теперь привести их к виду (117.11).

Для этого заметим, что при переходе от одного аффинного репера к другому

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i$$

контравариантные координаты метрического тензора g^{ij} связаны соотношениями

$$g^{ij} = A^i_{i'} A^j_{j'} g^{i'j'}. \tag{117.18}$$

Истолкуем соотношения (117.17) как частный случай (117.18), положив

$$\left.\begin{aligned} A^i_{\alpha'} = \xi^i_\alpha, \quad A^i_{n'} = \nu^i, \\ g^{\alpha'\beta'} = G^{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha'n'} = 0, \quad g^{n'n'} = \pm 1. \end{aligned}\right\} \tag{117.19}$$

Тогда соотношения (117.18) совпадут с соотношениями (117.17). Так как $\mathrm{Det}\,|g^{ij}|\neq 0$, то из (117.18) вытекает (от противного), что и $\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|\neq 0$, т. е. векторы

$$\xi^i_1,\ \ldots,\ \xi^i_{n-1},\ \nu^i$$

линейно независимы. Это для нас важно, так как линейная независимость векторов $\xi^i_\alpha=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ входит в определение гиперповерхности. Только теперь мы можем утверждать, что уравнения (117.16) определяют некоторую гиперповерхность (хотя еще неизвестно, будет ли она искомой).

Как мы знаем, тензорное преобразование (117.18) контравариантных координат g^{ij} метрического тензора сопровождается соответствующим преобразованием его ковариантных координат g_{ij} (т. е. элементов обратной матрицы):

$$g_{i'j'}=A^i_{i'}A^j_{j'}g_{ij}. \tag{117.20}$$

Из (117.19) легко следует, что

$$g_{\alpha'\beta'}=G_{\alpha\beta},\quad g_{\alpha'n'}=0,\quad g_{n'n'}=\pm 1.$$

Теперь (117.20) принимают вид (если i', j' придавать значения сначала α', β', затем α', n' и n', n'):

$$G_{\alpha\beta}=\xi^i_\alpha\,\xi^j_\beta g_{ij},\quad 0=\xi^i_\alpha\nu^j g_{ij},\quad \pm 1=\nu^i\nu^j g_{ij}. \tag{117.21}$$

Первое из этих равенств показывает, что *наперед заданный тензор* $G_{\alpha\beta}$ *действительно служит метрическим тензором на построенной нами гиперповерхности*, *второе — что вектор* ν^j *ортогонален ко всем* ξ^i_α *и направлен, следовательно, по нормали к этой гиперповерхности;* наконец, последнее равенство показывает, что вектор ν^j *единичный или мнимоединичный.*

Так как функции ξ^i_α, ν^i удовлетворяют уравнениям (117.7), то из второго из этих уравнений заключаем, что *наперед заданный тензор* $b_{\alpha\beta}$ *действительно служит вторым основным тензором на построенной нами гиперповерхности.* Теорема доказана; остается лишь показать, что все гиперповерхности, удовлетворяющие условиям теоремы, определяются в R_n с точностью до движения.

Аффинный репер, к которому мы отнесли вмещающее пространство R_n, был выбран при условии, чтобы в нем координаты метрического тензора g_{ij} имели значения (117.11). Другими словами, нам были наперед заданы попарные скалярные произведения (и скалярные квадраты) векторов репера. Очевидно, такой репер определяется с точностью до движения в R_n. Так как аналитическая сторона выкладок, из которых были определены функции $x^i(u^1,\ldots,u^n)$, ни в чем не меняется, будем ли мы относить R_n к одному или к другому такому реперу, то уравнения (117.16) будут в обоих случаях иметь один и тот же вид. Это значит, что то же движение, которое переводит первый репер во второй, переводит гиперповерхность V_{n-1}, построенную, исходя из первого репера, в некоторую гиперповерхность V'_{n-1}, построенную, исходя из второго репера. Этим наше утверждение доказано.

§ 118. Пространство постоянной кривизны

Мы переходим к изучению отдельных частных случаев римановых пространств. Из них наиболее замечательными являются *пространства постоянной кривизны*. Достаточно сказать, что к числу пространств постоянной кривизны принадлежат, кроме евклидова пространства, пространство Лобачевского, а также эллиптическое (и сферическое) пространство. Основной особенностью пространств постоянной кривизны является их однородность, столь же полная, как и у евклидова пространства. Эта однородность выражается в существовании группы движений от такого же числа параметров, как и в евклидовом пространстве $\left(\text{т. е. } \frac{n(n+1)}{2} \text{ в } n\text{-мерном случае}\right)$. Из однородной структуры этих пространств проистекает и богатство их геометрических свойств.

Мы будем говорить, что *данное риманово пространство* V_n *) *есть пространство постоянной кривизны, если в каждой точке кривизны его по возможным двумерным направлениям одинаковы.* (Мы не требуем, чтобы в различных точках кривизны были одинаковы.) Итак, основной идеей пространства постоянной кривизны является его однородность по всем направлениям в каждой точке.

Выясним, какой вид имеет тензор кривизны $R_{ij,\,kl}$ в пространстве постоянной кривизны. Перепишем формулу (111.14):

$$\frac{R_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\,\xi^{\alpha\beta}\,\xi^{\gamma\delta}}{(g_{\alpha\gamma}\,g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}\,g_{\beta\gamma})\;\xi^{\alpha\beta}\,\xi^{\gamma\delta}}=K. \tag{118.1}$$

Здесь греческие индексы пробегают у нас значения $1, 2, \ldots, n$ (как и латинские). В нашем случае кривизна K постоянна для всех двумерных направлений в данной точке и, следовательно, не зависит от выбора бивектора $\xi^{\alpha\beta}$, который характеризует направление.

Освободимся от знаменателя и перенесем все члены в левую часть; тогда, введя обозначение

$$R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}=R_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}-K\,(g_{\alpha\gamma}\,g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}\,g_{\beta\gamma}), \tag{118.2}$$

мы можем переписать (118.1) в виде

$$R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\xi^{\alpha\beta}\xi^{\gamma\delta}=0. \tag{118.3}$$

*) Мы берем $n > 2$, исключая из рассмотрения 2-мерные пространства.