другому такому реперу, то уравнения (117.16) будут в обоих случаях иметь один и тот же вид. Это значит, что то же движение, которое переводит первый репер во второй, переводит гиперповерхность V_{n-1}, построенную, исходя из первого репера, в некоторую гиперповерхность V'_{n-1}, построенную, исходя из второго репера. Этим наше утверждение доказано.

§ 118. Пространство постоянной кривизны

Мы переходим к изучению отдельных частных случаев римановых пространств. Из них наиболее замечательными являются *пространства постоянной кривизны*. Достаточно сказать, что к числу пространств постоянной кривизны принадлежат, кроме евклидова пространства, пространство Лобачевского, а также эллиптическое (и сферическое) пространство. Основной особенностью пространств постоянной кривизны является их однородность, столь же полная, как и у евклидова пространства. Эта однородность выражается в существовании группы движений от такого же числа параметров, как и в евклидовом пространстве $\left(\text{т. е. } \frac{n(n+1)}{2} \text{ в } n\text{-мерном случае}\right)$. Из однородной структуры этих пространств проистекает и богатство их геометрических свойств.

Мы будем говорить, что *данное риманово пространство* V_n *) *есть пространство постоянной кривизны, если в каждой точке кривизны его по возможным двумерным направлениям одинаковы.* (Мы не требуем, чтобы в различных точках кривизны были одинаковы.) Итак, основной идеей пространства постоянной кривизны является его однородность по всем направлениям в каждой точке.

Выясним, какой вид имеет тензор кривизны $R_{ij,\,kl}$ в пространстве постоянной кривизны. Перепишем формулу (111.14):

$$\frac{R_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\,\xi^{\alpha\beta}\,\xi^{\gamma\delta}}{(g_{\alpha\gamma}\,g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}\,g_{\beta\gamma})\,\xi^{\alpha\beta}\,\xi^{\gamma\delta}}=K. \tag{118.1}$$

Здесь греческие индексы пробегают у нас значения $1, 2, \ldots, n$ (как и латинские). В нашем случае кривизна K постоянна для всех двумерных направлений в данной точке и, следовательно, не зависит от выбора бивектора $\xi^{\alpha\beta}$, который характеризует направление.

Освободимся от знаменателя и перенесем все члены в левую часть; тогда, введя обозначение

$$R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}=R_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}-K\,(g_{\alpha\gamma}\,g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}\,g_{\beta\gamma}), \tag{118.2}$$

мы можем переписать (118.1) в виде

$$R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\xi^{\alpha\beta}\xi^{\gamma\delta}=0. \tag{118.3}$$

*) Мы берем $n>2$, исключая из рассмотрения 2-мерные пространства.

Как и (118.1), равенство (118.3) имеет место для любого двумерного направления. Мы хотим показать, что отсюда следует:

$$R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}=0. \qquad (118.4)$$

Здесь мы должны преодолеть некоторую трудность, заключающуюся в следующем: если бы $\xi^{\alpha\beta}$ был произвольным бивектором, то из тождества (118.3) немедленно следовало бы обращение в нуль коэффициентов $R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}$. Но у нас $\xi^{\alpha\beta}$ характеризует двумерное направление и потому обязательно *простой бивектор*, т. е. имеет строение:

$$\xi^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\xi_1^{\alpha}\xi_2^{\beta}-\xi_1^{\beta}\xi_2^{\alpha}\right), \qquad (118.5)$$

где ξ_1^{α} и ξ_2^{α} — два произвольных вектора, определяющих то двумерное направление (плоскость), о котором идет речь. После подстановки (118.5) в (118.3) последнее равенство, имеющее место для любого двумерного направления, должно обратиться в тождество относительно координат ξ_1^{α}, ξ_2^{α}. Сделав частичную подстановку, получим:

$$\frac{1}{2}R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\left(\xi_1^{\alpha}\,\xi_2^{\beta}-\xi_1^{\beta}\,\xi_2^{\alpha}\right)\xi^{\gamma\delta}=0,$$

или после раскрытия скобок

$$\frac{1}{2}R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\,\xi_1^{\alpha}\,\xi_2^{\beta}\,\xi^{\gamma\delta}-\frac{1}{2}R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\,\xi_1^{\beta}\,\xi_2^{\alpha}\,\xi^{\gamma\delta}=0.$$

Во втором члене поменяем обозначения индексов суммирования α и β; заменяя далее, $R'_{\beta\alpha,\,\gamma\delta}$ через $-R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}$ *), получим:

$$\frac{1}{2}R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\,\xi_1^{\alpha}\,\xi_2^{\beta}\,\xi^{\gamma\delta}+\frac{1}{2}R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\,\xi_1^{\alpha}\,\xi_2^{\beta}\,\xi^{\gamma\delta}=0,$$

или

$$R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\,\xi_1^{\alpha}\,\xi_2^{\beta}\xi^{\gamma\delta}=0.$$

Поступая аналогично с $\xi^{\gamma\delta}$, получим:

$$R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\,\xi_1^{\alpha}\,\xi_2^{\beta}\,\xi_1^{\gamma}\,\xi_2^{\delta}=0. \qquad (118.6)$$

Здесь многочлен четвертой степени относительно ξ_1^{α}, ξ_2^{β} тождественно обращается в нуль, а следовательно, все его коэффициенты после приведения подобных членов должны равняться нулю. Фиксируя на время индексы i, j, k, l, отберем члены, содержащие ξ_1^{i}, ξ_2^{j}, ξ_1^{k}, ξ_2^{l}. Члены такого вида, как видно из (118.6), получаются лишь при

*) Как легко проверить непосредственно из (118.2), $R'_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}$ обладает всеми алгебраическими свойствами тензора кривизны.

следующих значениях индексов α, β, γ, δ соответственно

$$1)\ i,\ j,\ k,\ l;\qquad 3)\ i,\ l,\ k,\ j;$$
$$2)\ k,\ j,\ i,\ l;\qquad 4)\ k,\ l,\ i,\ j.$$

(Впрочем, эти комбинации индексов будут различны лишь при $i \neq k$ и $j \neq l$. Если $i=k$ (или $j=l$), остается лишь две такие комбинации, если же $i=k$ и $j=l$, то только одна.) После приведения этих подобных между собой членов коэффициент при $\xi_1^i \xi_2^j \xi_1^k \xi_2^l$, равный сумме коэффициентов, должен обратиться в нуль:

$$R'_{ij,\,kl}+R'_{kj,\,il}+R'_{il,\,kj}+R'_{kl,\,ij}=0. \qquad (118.7)$$

На основании тождества $R'_{ij,\,kl}=R'_{kl,\,ij}$ первый член тождествен с четвертым, а второй с третьим, и (118.7) переходит в

$$R'_{ij,\,kl}+R'_{kj,\,il}=0. \qquad (118.8)$$

В случае $j=l$ мы непосредственно вместо (118.7) получаем (118.8), но так как в этом случае оба члена в (118.8) равны, то сразу $R'_{ij,\,kl}=0$. Аналогично и при $i=k$.

Перепишем (118.8), поменяв местами индексы i и j и умножая почленно на -1. Получим:

$$-R'_{ji,\,kl}-R'_{ki,\,jl}=0, \text{ т. е. } R'_{ij,\,kl}+R'_{ik,\,jl}=0.$$

Наконец, выпишем тождество

$$R'_{ij,\,kl}+R'_{ji,\,kl}=0$$

и сложим последние три равенства почленно. В силу тождества Риччи (110.8) вторые члены дают в сумме нуль, и мы получаем:

$$3R'_{ij,\,kl}=0.$$

Итак, во всех случаях

$$R'_{ij,\,kl}=0.$$

Отсюда согласно (118.2) получаем следующее строение тензора $R_{ij,\,kl}$ для пространства постоянной кривизны:

$$R_{ij,\,kl}=K(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}). \qquad (118.9)$$

В каждой точке координаты $R_{ij,\,kl}$ зависят только от координат метрического тензора g_{ij} и от кривизны K, постоянной для всех направлений в данной точке. Легко проверить подстановкой (118.9) в (118.1), что (118.1) обратно является следствием (118.9).

Теорема Шура. *В пространстве V_n $(n>2)$ постоянной кривизны (т. е. при кривизне, одинаковой по всем направлениям в каждой данной точке) кривизна сохраняет постоянное значение и от точки к точке.*

Другими словами, нужно показать, что в выведенной нами формуле (118.9) кривизна K остается постоянной для всех точек, хотя непосредственно этого из наших предположений не видно и пока мы должны считать K некоторой функцией координат точки:

$$K = K(x^1, \ldots, x^n).$$

Дифференцируя (118.9) почленно, получаем:

$$\nabla_m R_{ij,\,kl} = (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) K_m. \qquad (118.10)$$

Здесь $K_m = \frac{\partial K}{\partial x^m} = \nabla_m K$; частные, производные от инварианта совпадают, как мы знаем, с абсолютными; что же касается g_{ij}, то они ведут себя при абсолютном дифференцировании как постоянные, т. е.

$$\nabla_m g_{ij} = 0.$$

Мы хотим показать, что частные производные K_m все равны нулю, откуда $K = \text{const}$.

Используем тождество Бианки—Падова. Циклируем (118.10) по индексам m, i, j, т. е. делаем над m, i, j два раза круговую подстановку:

$$\nabla_i R_{jm,\,kl} = (g_{jk}g_{ml} - g_{jl}g_{mk}) K_i,$$
$$\nabla_j R_{mi,\,kl} = (g_{mk}g_{il} - g_{ml}g_{ik}) K_j$$

и результаты сложим почленно с (118.10). Согласно тождеству Бианки—Падова сумма левых частей равна нулю. Итак, получаем:

$$0 = K_m (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) + K_i (g_{jk}g_{ml} - g_{jl}g_{mk}) + K_j (g_{mk}g_{il} - g_{ml}g_{ik}).$$

Помножим на g^{lm} и просуммируем по l и m. Тогда, так как

$$g^{ip}g_{jp} = \delta^i_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$$

и, следовательно,

$$g^{lm}g_{lm} = \delta^l_l = n, \qquad g_{il}g_{mk}g^{ml} = g_{il}\delta^l_k = g_{ik},$$
$$K_m g^{ml} g_{il} = K_m \delta^m_i = K_i,$$

мы получаем:

$$g_{ik}K_j - g_{jk}K_i + n g_{jk}K_i - g_{jk}K_i + g_{ik}K_j - n g_{ik}K_j = 0.$$

Приведя подобные члены, найдем:

$$(g_{jk}K_i - g_{ik}K_j)(n-2) = 0. \qquad (118.11)$$

Так как случай $n = 2$ нами исключен из рассмотрения, то $n - 2 \neq 0$, и следовательно:

$$g_{jk}K_i - g_{ik}K_j = 0. \qquad (118.12)$$

Умножив (118.12) на g^{jk} и просуммировав по j и k, получим:

$$K_i(n-1) = 0,$$

а следовательно, так как $n > 2$ и $n-1 \neq 0$,

$$K_i = 0,$$

откуда

$$K = \mathrm{const}.$$

Итак, если число измерений пространства больше двух, то достаточно потребовать постоянства кривизны по всем направлениям в каждой данной точке, чтобы утверждать, что кривизна одна и та же и во всех точках пространства.

Теперь рассмотрим оставленный в стороне случай $n = 2$. Для всякого двумерного пространства двумерное направление в каждой точке только одно и кривизна единственная, так что прежнее требование не может служить определением пространства постоянной кривизны: оно удовлетворяется автоматически. В связи с этим в каждой точке всегда имеет место равенство (118.9):

$$R_{ij,\,kl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

как это видно уже из (112.2). Действительно, для справедливости (118.9) достаточно, чтобы оно имело место для единственной существенной компоненты $R_{12,\,12}$. Зато теперь (118.9) уже не имеет своим следствием $K = \mathrm{const}$, так как (118.11) удовлетворяется тождественно в силу $n = 2$.

В случае $n = 2$ пространство постоянной кривизны мы определим непосредственно требованием $K = \mathrm{const}$ для всех его точек.

§ 119. Пространство постоянной кривизны V_{n-1} как гиперсфера в R_n

Мы хотим показать, что метрику риманова пространства *постоянной кривизны* (отличной от нуля) всегда можно реализовать, по крайней мере, локально, на гиперсфере в евклидовом пространстве на единицу большего числа измерений. Чтобы согласовать обозначения с § 117, обозначим число измерений *пространства постоянной кривизны* через $n-1$, его метрический тензор через $G_{\alpha\beta}$, тензор кривизны через $\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\alpha}$ и операцию абсолютного дифференцирования $\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}$. Греческие индексы будут пробегать значения $1, 2, \ldots, n-1$,