и следовательно:

$$g_{jk}K_i - g_{ik}K_j = 0. \tag{118.12}$$

Умножив (118.12) на g^{jk} и просуммировав по j и k, получим:

$$K_i(n-1) = 0,$$

а следовательно, так как $n > 2$ и $n-1 \neq 0$,

$$K_i = 0,$$

откуда

$$K = \text{const}.$$

Итак, если число измерений пространства больше двух, то достаточно потребовать постоянства кривизны по всем направлениям в каждой данной точке, чтобы утверждать, что кривизна одна и та же и во всех точках пространства.

Теперь рассмотрим оставленный в стороне случай $n=2$. Для всякого двумерного пространства двумерное направление в каждой точке только одно и кривизна единственная, так что прежнее требование не может служить определением пространства постоянной кривизны: оно удовлетворяется автоматически. В связи с этим в каждой точке всегда имеет место равенство (118.9):

$$R_{ij,\,kl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

как это видно уже из (112.2). Действительно, для справедливости (118.9) достаточно, чтобы оно имело место для единственной существенной компоненты $R_{12,\,12}$. Зато теперь (118.9) уже не имеет своим следствием $K = \text{const}$, так как (118.11) удовлетворяется тождественно в силу $n=2$.

В случае $n=2$ пространство постоянной кривизны мы определим непосредственно требованием $K = \text{const}$ для всех его точек.

§ 119. Пространство постоянной кривизны V_{n-1} как гиперсфера в R_n

Мы хотим показать, что метрику риманова пространства *постоянной кривизны* (отличной от нуля) всегда можно реализовать, по крайней мере, локально, на гиперсфере в евклидовом пространстве на единицу большего числа измерений. Чтобы согласовать обозначения с § 117, обозначим число измерений *пространства постоянной кривизны* через $n-1$, его метрический тензор через $G_{\alpha\beta}$, тензор кривизны через $\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\alpha}$ и операцию абсолютного дифференцирования $\overset{*}{\nabla}_{\varkappa}$. Греческие индексы будут пробегать значения $1, 2, \ldots, n-1$, латинские 1, 2, ..., n. Согласно (118.9)

$$\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa.\,\beta\alpha} = K(G_{\lambda\beta}G_{\varkappa\alpha} - G_{\lambda\alpha}G_{\varkappa\beta}), \tag{119.1}$$

причем, как мы знаем,

$$K = \text{const}.$$

Мы будем предполагать при этом $K \neq 0$. Действительно, в случае $K = 0$ пространство постоянной кривизны не нуждается в исследовании: оно является просто евклидовым пространством или, по крайней мере, локально евклидовым в силу обращения в нуль тензора кривизны.

Мы хотим доказать следующую теорему.

Если пространство постоянной кривизны V_{n-1} представляет собой односвязное элементарное многообразие (отнесенное к координатам $u^1, \ldots, u^{n-1}$ в некоторой области их изменения), то его можно реализовать (с сохранением метрики) в виде некоторой области на гиперсфере S_{n-1} в евклидовом пространстве R_n. Не исключено при этом, что эта область будет многолистной, т. е. что V_{n-1} многократно покроет ту или иную часть гиперсферы.

Если же пространство постоянной кривизны топологически устроено как угодно, то указанное в теореме свойство можно гарантировать лишь локально, т. е. для некоторой окрестности любой точки M (достаточно взять эту окрестность в виде односвязного элементарного многообразия).

Переходя к доказательству, *рассмотрим отдельно случай* $K > 0$. Построим тензор

$$b_{\alpha\beta} = \sqrt{K}\, G_{\alpha\beta}. \tag{119.2}$$

Тогда (119.1) можно переписать в виде

$$\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa.\,\beta\alpha} = b_{\lambda\beta}b_{\varkappa\alpha} - b_{\lambda\alpha}b_{\varkappa\beta}. \tag{119.3}$$

Кроме того, так как $\overset{*}{\nabla}_\varkappa G_{\alpha\beta} = 0$, $\sqrt{K} = \text{const}$, то

$$\overset{*}{\nabla}_\varkappa b_{\alpha\beta} = 0. \tag{119.4}$$

Мы видим, что тензоры $G_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, заданные в V_{n-1}, удовлетворяют условиям (117.2), (117.3) (причем в (117.2) берется верхний знак). По основной теореме § 117 отсюда следует, что V_{n-1} можно реализовать в виде гиперповерхности в R_n, на которой $G_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ будут служить первым и вторым основными тензорами. При этом нормальный вектор ν^i будет единичным (а не мнимоединичным), так как в (117.2) берется верхний знак $(+)$, а следовательно, $g_{ij}\nu^i\nu^j = +1$.

Остается показать, что построенная гиперповерхность будет гиперсферой. Предполагая, что R_n отнесено к аффинным координатам x^i, перепишем первое из уравнений (117.7) (причем, как и в (117.2), берем верхний знак):

$$\overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i = -b_\varkappa^\sigma \xi_\sigma^i.$$

Но в силу (119.2)

$$b_\varkappa^\sigma = G^{\sigma\varrho} b_{\varkappa\varrho} = \sqrt{K} G^{\sigma\varrho} G_{\varkappa\varrho} = \sqrt{K} \delta_\varkappa^\sigma,$$

и следовательно,

$$\overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i = -\sqrt{K} \xi_\varkappa^i.$$

Так как $\overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i = \frac{\partial \nu^i}{\partial u^\varkappa}$ (см. (117.8)) и $\xi_\varkappa^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\varkappa}$, то окончательно

$$\frac{\partial \nu^i}{\partial u^\varkappa} = -\sqrt{K} \frac{\partial x^i}{\partial u^\varkappa}, \text{ т. е. } \frac{\partial x^i}{\partial u^\varkappa} = \frac{\partial}{\partial u^\varkappa}\left(-\frac{\nu^i}{\sqrt{K}}\right).$$

Это означает, что x^i лишь на константы отличаются от $-\frac{\nu^i}{\sqrt{K}}$; сдвигая начало координат, можно добиться, чтобы

$$x^i = -\frac{1}{\sqrt{K}} \nu^i. \tag{119.5}$$

Так как ν^i — единичный вектор, то радиус-вектор x^i имеет постоянную длину $\frac{1}{\sqrt{K}}$, а следовательно, построенная нами гиперповерхность образует кусок гиперсферы S_{n-1} радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$ с центром в начале координат.

Теперь рассмотрим случай $K < 0$. Построим тензор

$$b_{\alpha\beta} = \sqrt{-K} G_{\alpha\beta} \tag{119.6}$$

и перепишем (119.1) в виде

$$\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\alpha} = -(b_{\lambda\beta} b_{\varkappa\alpha} - b_{\lambda\alpha} b_{\varkappa\beta}). \tag{119.7}$$

По-прежнему

$$\overset{*}{\nabla}_\varkappa b_{\alpha\beta} = 0, \tag{119.8}$$

и следовательно, тензоры $G_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условиям (117.2), (117.3), причем в (117.2) берется нижний знак. Последнее означает, что нормальный вектор ν^i к гиперповерхности, в виде которой реализуется V_{n-1}, будет мнимоединичным, $g_{ij}\nu^i\nu^j = -1$. Далее, записываем первое из уравнений (117.7) (беря теперь нижний знак):

$$\overset{*}{\nabla}_\varkappa \nu^i = b^\sigma_\varkappa \xi^i_\sigma$$

и совершенно аналогичной выкладкой получаем:

$$x^i = \frac{1}{\sqrt{-K}} \nu^i. \qquad (119.9)$$

Так как ν^i — мнимоединичный вектор, то радиус-вектор x^i имеет постоянную длину $\frac{i}{\sqrt{-K}}$. Мы получаем кусок гиперсферы S_{n-1} чисто мнимого радиуса $\frac{i}{\sqrt{-K}}$.

Если обозначить радиус гиперсферы через ρ в первом и через ρi во втором случае, то мы получим соответственно

$$K = \frac{1}{\rho^2}, \qquad K = -\frac{1}{\rho^2}. \qquad (119.10)$$

Несмотря на то, что для пространств постоянной кривизны мы доказали важную теорему о реализации их на гиперсферах, мы, строго говоря, до сих пор не знаем, *существуют ли такие пространства* (за исключением евклидова случая $K=0$). Действительно, при доказательстве теоремы существование этих пространств мы *предполагали*.

Чтобы показать, что они существуют, достаточно обнаружить, что риманова метрика на всякой гиперсфере ненулевого радиуса $S_{n-1} \subset R_n$ обладает постоянной кривизной. Отнесем вмещающее пространство R_n к аффинным координатам x^i с началом в центре гиперсферы S_{n-1}. Тогда радиус-вектор x^i, проведенный в какую-либо точку гиперсферы S_{n-1}, направлен по нормали к ней (§ 86), а значит, отличается от нормального вектора ν^i (единичного или мнимоединичного) лишь численным множителем

$$x^i = \rho \nu^i. \qquad (119.11)$$

Если при этом ν^i — единичный вектор, то S_{n-1} имеет радиус ρ, а если мнимоединичный, то ρi. Выпишем первую формулу (117.7), принимая во внимание (117.8) (эти формулы имеют место для любой гиперповерхности $V_{n-1} \subset R_n$):

$$\frac{\partial \nu^i}{\partial u^\varkappa} = \mp b^\sigma_\varkappa \xi^i_\sigma.$$

Так как $\nu^i = \frac{x^i}{\rho}$, а $\xi^i_\sigma = \frac{\partial x^i}{\partial u^\sigma}$, то

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial x^i}{\partial u^\varkappa} = \mp b^\sigma_\varkappa \frac{\partial x^i}{\partial u^\sigma}.$$

В силу линейной независимости векторов $\frac{\partial x^i}{\partial u^\sigma}$ отсюда следует, что коэффициенты при них в правой и левой частях равенства совпадают, т. е.

$$\mp b^\sigma_\varkappa = \frac{1}{\rho}\,\delta^\sigma_\varkappa\,.$$

Опуская индекс σ при помощи метрического тензора $G_{\lambda\sigma}$, получаем:

$$\mp b_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{\rho}\,G_{\varkappa\lambda}.$$

Вставляя полученное выражение для $b_{\varkappa\lambda}$ в формулы Гаусса (117.2), имеем:

$$\overset{*}{R}_{\lambda\varkappa,\,\beta\alpha} = \pm\,\frac{1}{\rho^2}\,(G_{\lambda\beta}G_{\varkappa\alpha} - G_{\varkappa\beta}G_{\lambda\alpha}).$$

Таким образом, на S_{n-1} имеют место соотношения (119.1), где

$$K = \pm\frac{1}{\rho^2}\,,$$

плюс в случае радиуса ρ и минус в случае радиуса ρi. Это показывает, что *риманова метрика на S_{n-1} имеет постоянную кривизну.*

Итак, образцом римановых пространств V_{n-1} постоянной кривизны можно считать *неевклидовы пространства*, метрика которых полностью совпадает с метрикой гиперсфер $S_{n-1} \subset R_n$. Но и любые пространства постоянной кривизны, по крайней мере, локально, обладают такой же метрикой, как было показано в этом параграфе. Отсюда на любые пространства постоянной кривизны переносится (по крайней мере, в локальном смысле) свойство свободной подвижности, установленное в § 87 для неевклидовых пространств; а именно, некоторую окрестность произвольной точки M данного пространства всегда можно отобразить с сохранением метрики на окрестность другой произвольной точки M' и притом так, чтобы ортонормированный репер, заданный в M, перешел в произвольно выбранный ортонормированный репер в M'.

Точно так же в произвольном пространстве постоянной кривизны имеет место (по крайней мере, локально) то выражение для метрической квадратичной формы $ds^2 = G_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta$, которое было подсчитано в § 87 для гиперсферы S_{n-1}. Разумеется, нужно брать ту гиперсферу, на которую данное пространство способно изометрически налагаться.

В частности, отсюда следует, что *пространства постоянной кривизны (по крайней мере, локально) конформно евклидовы.*