§ 120. Проективно евклидовы пространства в метрическом случае

В § 109 были установлены необходимые и достаточные признаки для того, чтобы пространство аффинной связности без кручения L_n^0 было проективно евклидовым. Эти признаки заключались в том, что тензор кривизны должен иметь строение (109.10):

$$R_{ik,\ i}^{\ \ \ \ q} = \delta_k^q P_{li} - \delta_l^q P_{ki} + \delta_i^q (P_{lk} - P_{kl}), \tag{120.1}$$

где тензор P_{ki} удовлетворяет условиям (109.17):

$$\nabla_l P_{ki} = \nabla_k P_{li}. \tag{120.2}$$

Из (120.1) следует, что P_{ki} необходимо имеет вид (109.14):

$$P_{ki} = -\frac{nR_{ki} + R_{ik}}{n^2 - 1}. \tag{120.3}$$

Выпишем эти признаки в случае риманова пространства V_n $(n \geqslant 2)$. Как мы знаем [(110.13)], тензор Риччи будет в этом случае симметричным:

$$R_{ki} = R_{ik}. \tag{120.4}$$

Заметим, что класс пространств L_n^0 с симметрическим тензором Риччи значительно шире класса римановых пространств V_n. Это будут так называемые *пространства эквиаффинной связности*. Они, вообще говоря, не обладают метрикой, но тем не менее в их касательных пространствах A_n можно ввести измерение объемов так, что объем n-мерного параллелепипеда, построенного на n векторах, *сохраняется при параллельном перенесении этих векторов по любому пути*. Это свойство можно принять за определение пространств эквиаффинной связности; тогда условие $R_{ki} = R_{ik}$ будет служить их необходимым и достаточным признаком. Доказательства мы не приводим.

В силу симметрии тензора Риччи (120.3) принимает упрощенный вид

$$P_{ki} = -\frac{1}{n-1} R_{ki}. \tag{120.5}$$

Очевидно,

$$P_{ki} = P_{ik}.$$

Перепишем (120.1), опустив индекс q путем свертывания с g_{qj} (и приняв во внимание $P_{ki} = P_{ik}$):

$$R_{lk,\ ij} = g_{kj} P_{li} - g_{lj} P_{ki}. \tag{120.6}$$

Свертывая (120.6) с g^{ki}, мы получаем (переставив у $R_{lk,\,ij}$ индексы внутри каждой пары):

$$g^{ki}R_{kl,\,ji}=\delta^i_j P_{li}-g_{lj}P, \quad \text{где} \quad P=P_{ki}g^{ki},$$

или окончательно

$$R_{lj}=P_{lj}-g_{lj}P.$$

Заменяя здесь R_{lj} согласно (120.5) через $-(n-1)P_{lj}$, мы получаем:

$$nP_{lj}=g_{lj}P, \quad \text{или} \quad P_{lj}=Kg_{lj}, \tag{120.7}$$

где $K=\frac{1}{n}P$.

Вставляя эти значения P_{lj} в (120.6), получаем:

$$R_{lk,\,ij}=K(g_{li}g_{kj}-g_{lj}g_{ki}), \tag{120.8}$$

а это в случае $n>2$ означает, что наше пространство — постоянной кривизны (§ 118). В случае же $n=2$ мы используем условие (120.2), которое в силу (120.7) принимает вид

$$\nabla_l K\cdot g_{ki}=\nabla_k K\cdot g_{li}.$$

Мы пришли к соотношению (118.12), из которого следует, как мы видели, $K=\text{const}$. Мы снова получаем пространство постоянной кривизны.

Итак, проективно евклидово риманово пространство необходимо является пространством постоянной кривизны.

Верно и обратное: всякое пространство постоянной кривизны будет проективно евклидовым. В самом деле, поскольку тензор кривизны имеет строение (120.8), где $K=\text{const}$, то, положив

$$P_{ij}=Kg_{ij},$$

мы убеждаемся, что условия (120.2), (120.6) (а тем самым и (120.1)) имеют место, а это обеспечивает проективно евклидов характер пространства постоянной кривизны.

Впрочем, тот же результат можно получить наглядным геометрическим путем. Пространство V_{n-1} постоянной кривизны (по крайней мере, локально) реализуется на гиперсфере $S_{n-1}\subset R_n$. Геодезические линии будут совпадать при этом с сечениями гиперсферы S_{n-1} двумерными плоскостями A_2, проходящими через ее центр. (Очевидно, в случае неизотропной A_2 такое сечение представляет собой окружность на собственно евклидовой или псевдоевклидовой плоскости A_2.) В самом деле, построим в какой-нибудь точке сечения касательный к нему вектор ξ и будем параллельно переносить его вдоль этого сечения с точки зрения римановой метрики на S_{n-1}. Мы хотим показать, что ξ остается касательным вектором (рис. 31). Покажем прежде всего, что ξ остается в плоскости сечения. Согласно § 94 при параллельном перенесении ξ его дифференциал $d\xi$ во вмещающем пространстве R_n направлен ортогонально к гиперплоскости, касательной к S_{n-1}, т. е. коллинеарно радиусу-вектору каждой данной точки. Так как радиусы-векторы всех точек сечения лежат в его плоскости A_2, то $d\xi$ также лежит все время в плоскости A_2, а следовательно, ξ остается в этой плоскости (в начальный момент ξ как вектор, касательный к плоскому сечению, лежит, конечно, в его плоскости A_2).

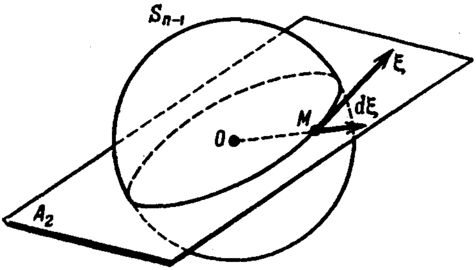

Рис. 31.

Оставаясь в плоскости A_2 и в то же время принадлежа S_{n-1} (т. е. касаясь этой гиперповерхности), вектор ξ остается касательным к сечению S_{n-1} плоскостью A_2. Этим показано, что такие сечения являются геодезическими линиями на S_{n-1}. (Заметим, что нашим наглядным геометрическим соображениям нетрудно придать и строгую аналитическую форму.)

Так как сечение S_{n-1} плоскостью A_2 можно провести через любую точку на S_{n-1} и в любом направлении на ней, то эти сечения исчерпывают все геодезические линии на S_{n-1}.

Проектируем теперь гиперсферу S_{n-1} из ее центра O на произвольную гиперплоскость A_{n-1} в R_n (не проходящую через O). Тогда геодезические на S_{n-1} проектируются проходящими через них плоскостями A_2 в прямые линии на A_{n-1}. Тем самым метрика на S_{n-1} будет проективно евклидовой.

§ 121. Конформное соответствие римановых пространств

Сначала рассмотрим вопрос более общего характера. Пусть независимо друг от друга даны два каких-либо римановых пространства, оба с одним и тем же числом измерений n. В каждом из этих пространств имеется своя система координат и своя метрика:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

в первом и

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} d\bar{x}^\alpha\, d\bar{x}^\beta$$

во втором.