сечения с точки зрения римановой метрики на S_{n-1}. Мы хотим показать, что ξ остается касательным вектором (рис. 31). Покажем прежде всего, что ξ остается в плоскости сечения. Согласно § 94 при параллельном перенесении ξ его дифференциал $d\xi$ во вмещающем пространстве R_n направлен ортогонально к гиперплоскости, касательной к S_{n-1}, т. е. коллинеарно радиусу-вектору каждой данной точки. Так как радиусы-векторы всех точек сечения лежат в его плоскости A_2, то $d\xi$ также лежит все время в плоскости A_2, а следовательно, ξ остается в этой плоскости (в начальный момент ξ как вектор, касательный к плоскому сечению, лежит, конечно, в его плоскости A_2).

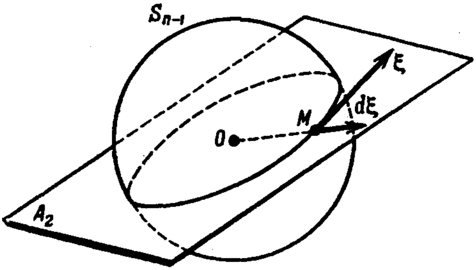

Рис. 31.

Оставаясь в плоскости A_2 и в то же время принадлежа S_{n-1} (т. е. касаясь этой гиперповерхности), вектор ξ остается касательным к сечению S_{n-1} плоскостью A_2. Этим показано, что такие сечения являются геодезическими линиями на S_{n-1}. (Заметим, что нашим наглядным геометрическим соображениям нетрудно придать и строгую аналитическую форму.)

Так как сечение S_{n-1} плоскостью A_2 можно провести через любую точку на S_{n-1} и в любом направлении на ней, то эти сечения исчерпывают все геодезические линии на S_{n-1}.

Проектируем теперь гиперсферу S_{n-1} из ее центра O на произвольную гиперплоскость A_{n-1} в R_n (не проходящую через O). Тогда геодезические на S_{n-1} проектируются проходящими через них плоскостями A_2 в прямые линии на A_{n-1}. Тем самым метрика на S_{n-1} будет проективно евклидовой.

§ 121. Конформное соответствие римановых пространств

Сначала рассмотрим вопрос более общего характера. Пусть независимо друг от друга даны два каких-либо римановых пространства, оба с одним и тем же числом измерений n. В каждом из этих пространств имеется своя система координат и своя метрика:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

в первом и

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, d\bar{x}^\alpha\, d\bar{x}^\beta$$

во втором.

Предположим для простоты, что соответствующие многообразия $D(x^1, \ldots, x^n)$ и $\bar{D}(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ — элементарные. Пусть, далее, между точками области D и области $\bar{D}$ установлено взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое соответствие. Тогда в сущности излишне строить самостоятельную систему координат в каждом пространстве, а именно, имея систему координат x^i в области D, можно «перенести» ее в область $\bar{D}$ следующим очевидным образом. Каждой точке $\bar{M}$ в области $\bar{D}$ приписываем те же координаты x^i, какие уже имеет в области D соответствующая ей точка M. Итак, теперь для соответствующих точек M и $\bar{M}$ у нас $\bar{x}^i = x^i$. Тем не менее метрика обоих пространств остается, вообще говоря, различной, так что и для соответствующих точек $\bar{g}_{\alpha\beta} \neq g_{\alpha\beta}$ *).

С точки зрения аналитической можно сказать, что имеется одно элементарное многообразие $D(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, причем в нем заданы две квадратичные формы, определяющие две различные римановы метрики:

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \\ d\bar{s}^2 &= \bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta. \end{aligned}\right\} \tag{121.1}$$

До сих пор речь шла вообще о взаимно однозначном соответствии двух различных римановых пространств. Теперь мы займемся частным случаем этого соответствия — *конформным отображением*.

Мы скажем, что многообразия D и $\bar{D}$ *конформно отображены* друг на друга, если квадратичная форма $d\bar{s}^2$ отличается от ds^2 множителем a, зависящим лишь от выбора точки $M(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и не зависящим, следовательно, от направления бесконечно малого смещения $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$:

$$d\bar{s}^2 = a\, ds^2, \tag{121.2}$$

где $a = a(x^1, \ldots, x^n)$.

Условие (121.2) можно записать иначе, вставив выражение для $d\bar{s}^2$ и ds^2 из (121.1). Так как (121.2) должно удовлетворяться тождественно, в частности, относительно $dx^1, \ldots, dx^n$, то координаты тензоров $\bar{g}_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ оказываются пропорциональными в каждой точке с коэффициентом пропорциональности a:

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = a g_{\alpha\beta}. \tag{121.3}$$

*) В частном случае может оказаться $\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$. Тогда соответствие называется изометрическим, метрика в D и $\bar{D}$ оказывается одной и той же.

Геометрически условие (121.2) означает следующее: дифференциалы всех дуг, выходящих из данной точки M области D, при переходе в соответствующую точку $\overline{M}$ области $\overline{D}$ изменяются в одном и том же отношении независимо от их направления. Отношение это, очевидно, равное $\sqrt{a}$, будет иметь свое определенное значение в каждой точке (рис. 32).

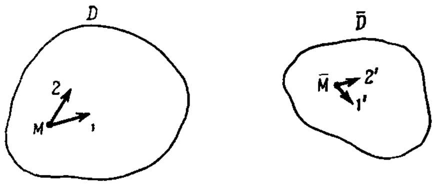

Рис. 32.

Действительно, поскольку точки M и $\overline{M}$ — соответствующие значения их координат x^i — общие, а поскольку бесконечно малые смещения 1 и $1'$ — соответствующие, они определяются одними и теми же dx^i. Условие (121.2) при данных x^i и dx^i выражает, следовательно, что отношение дифференциалов дуг $1'$ и 1 равно $\sqrt{a}$. Как следствие получаем отсюда сохранение углов при нашем отображении. Ограничимся случаем собственно риманова пространства. Пусть направления 1 и 2 в точке M задаются соответственно дифференциалами координат dx^i, δx^i. Теми же дифференциалами задаются и соответствующие направления $1'$ и $2'$ в точке $\overline{M}$. По известной формуле

$$\cos(\widehat{1, 2}) = \frac{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \delta x^\beta}{\sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta}\, \sqrt{g_{\alpha\beta}\delta x^\alpha \delta x^\beta}} \qquad \left(\text{т. е. } \frac{d\mathbf{x}\, \delta\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|\,|\delta\mathbf{x}|}\right).$$

Вычисляя аналогичным образом $\cos(\widehat{1', 2'})$ в области $\overline{D}$, мы видим, что $\cos(\widehat{1', 2'}) = \cos(\widehat{1, 2})$, так как dx^i и δx^i остаются без изменения, а все $g_{\alpha\beta}$ меняются в одном и том же отношении.

Итак, наше соответствие является в бесконечно малом соответствием подобия, если пренебречь бесконечно малыми второго порядка. В этом и заключается геометрический смысл конформного отображения.

Введем обозначение: $a = e^{2\sigma}$; это можно сделать, предполагая $a > 0$ (в противном случае мы изменили бы знак у $\overline{ds^2}$, что означает лишь тривиальное преобразование метрики). Удобство этого обозначения обнаружится в дальнейшем.

Итак, если в одном и том же многообразии (в общем случае не обязательно элементарном) заданы две римановых метрики, связанные зависимостью

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij}, \tag{121.4}$$

где $\sigma = \sigma(x^1, \ldots, x^n)$ — непрерывно дифференцируемая функция точки, то этим самым даны два римановых пространства, приведенных в конформное соответствие друг с другом.

Выделим предварительно лемму, относящуюся к тензорному анализу, которая будет для нас важна в дальнейшем.

Лемма. Предположим, что нам дано риманово пространство V_n, в котором тензор кривизны имеет особое строение, а именно:

$$R_{ij,\,kl} = g_{ik}S_{jl} - g_{jk}S_{il} - g_{il}S_{jk} + g_{jl}S_{ik}, \tag{121.5}$$

где g_{ij} — метрический, а S_{ij} — некоторый другой симметрический тензор *). Составим в нашем пространстве дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\sigma = \sigma(x^1, \ldots, x^n)$:

$$\nabla_j\sigma_k - \sigma_j\sigma_k + \frac{1}{2}g_{jk}g^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta = S_{jk}, \tag{121.6}$$

где $\sigma_k = \nabla_k\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial x^k}$. Мы утверждаем, что *условия интегрируемости* этой системы дифференциальных уравнений будут:

$$\nabla_i S_{jk} - \nabla_j S_{ik} = 0. \tag{121.7}$$

Доказательство. Введем сокращенное обозначение $\Delta_1\sigma$ для инвариантного выражения

$$\Delta_1\sigma = g^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta = \sigma_\alpha\sigma^\alpha = g_{\alpha\beta}\sigma^\alpha\sigma^\beta \qquad (\sigma^\alpha = g^{\alpha\beta}\sigma_\beta), \tag{121.8}$$

которое называется *первым дифференциальным параметром скаляра* σ. Запишем дифференциальное уравнение (121.6) в виде, разрешенном относительно второй ковариантной производной скаляра:

$$\nabla_j\sigma_k = \sigma_j\sigma_k - \frac{1}{2}g_{jk}g^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta + S_{jk}. \tag{121.9}$$

Можно писать здесь $\nabla_j\sigma_k$ и в развернутом виде:

$$\nabla_j\sigma_k = \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^j\,\partial x^k} - \Gamma^\alpha_{kj}\sigma_\alpha,$$

рассматривая (121.9) как систему n^2 дифференциальных уравнений ($j, k = 1, 2, \ldots, n$) в частных производных 2-го порядка относительно неизвестной σ. Как известно, для получения условий интегрируемости мы дифференцируем (121.9) почленно по x^i и альтернируем по i и j. При этом производные 3-го порядка от σ уничтожаются, производные 2-го порядка можно заменить из самой

*) Правая часть получается из своего первого члена путем альтернирования по индексам i и j и вторичного альтернирования результата по индексам k и l.

системы (121.9), и условия интегрируемости, получаемые в результате, могут содержать лишь σ и σ_k. Все эти операции мы проделаем в ковариантных производных, что, конечно, нисколько не меняет их сущности. Итак, (121.9) мы подвергаем ковариантному дифференцированию ∇_i. Во втором члене справа g_{jk}, $g_{\alpha\beta}$ ведут себя как постоянные, дифференцирование же σ_α и затем σ_β дает одинаковый результат (разница лишь в обозначениях индексов суммирования), так что оба полученных члена объединяем в один. Получаем:

$$\nabla_i\nabla_j\sigma_k = (\nabla_i\sigma_j)\,\sigma_k + \sigma_j\nabla_i\sigma_k - g_{jk}g^{\alpha\beta}(\nabla_i\sigma_\alpha)\,\sigma_\beta + \nabla_i S_{jk}. \tag{121.10}$$

Теперь произведем альтернацию по индексам i и j (без деления на 2). Выясним, что получается в *правой части*. Так как

$$\nabla_i\sigma_j = \sigma_{ij} - \Gamma_{ij}^{\alpha}\sigma_\alpha$$

симметрично относительно индексов i и j, то при альтернации первый член правой части выпадает. В остальных членах заменяем вторые производные от σ из (121.9) и (пользуясь обозначением (121.8)) получаем:

$$\sigma_j\left(\sigma_i\sigma_k - \frac{1}{2}g_{ik}\Delta_1\sigma + S_{ik}\right) - \\ - g_{jk}\sigma^\alpha\left(\sigma_i\sigma_\alpha - \frac{1}{2}g_{i\alpha}\Delta_1\sigma + S_{i\alpha}\right) + \nabla_i S_{jk}\ [ij]\ ^{*)}.$$

Раскроем здесь скобки. Сумма членов второго, четвертого и пятого образует симметричное относительно i и j выражение

$$-\frac{1}{2}\sigma_j g_{ik}\Delta_1\sigma - \sigma_i g_{jk}\Delta_1\sigma + \frac{1}{2}\sigma_i g_{jk}\Delta_1\sigma = -\frac{1}{2}\Delta_1\sigma\,(g_{ik}\sigma_j + g_{jk}\sigma_i),$$

которое, равно как и первый член, исчезает при альтернировании. Остаются члены

$$\sigma_j S_{ik} - g_{jk}S_{i\alpha}\sigma^\alpha + \nabla_i S_{jk}\,[ij]. \tag{121.11}$$

Левая часть (121.10) согласно (108.14) принимает после альтернации следующий вид:

$$\nabla_i\nabla_j\sigma_k - \nabla_j\Delta_i\sigma_k = R_{ij,\,k}{}^{\beta}\sigma_\beta = R_{ij,\,k\alpha}g^{\alpha\beta}\sigma_\beta = R_{ij,\,k\alpha}\sigma^\alpha.$$

Используем теперь особое строение тензора кривизны в нашем пространстве, подставляя сюда его выражение из (121.5):

$$(g_{ik}S_{j\alpha} - g_{jk}S_{i\alpha} - g_{i\alpha}S_{jk} + g_{j\alpha}S_{ik})\,\sigma^\alpha = \sigma_j S_{ik} - g_{jk}S_{i\alpha}\sigma^\alpha\,[ij]. \tag{121.12}$$

Приравниваем теперь, чтобы получить искомые условия интегри-

---

*) Как всегда, символ $[ij]$ после многочлена означает требование проальтернировать все его члены по индексам i и j (без деления на 2).

руемости, левую и правую части равенства (121.10) после альтернации, т. е. (121.11) и (121.12). Одинаковые члены сокращаются, и остается:

$$0=\nabla_i S_{jk}[ij],$$

или более подробно

$$\nabla_i S_{jk}=\nabla_j S_{ik}.$$

Лемма доказана.

Установим теперь связь между тензорами кривизны двух римановых пространств, находящихся в конформном соответствии.

Согласно (121.4) в соответствующих точках мы имеем:

$$\bar{g}_{ij}=e^{2\sigma}g_{ij}.$$

Отсюда легко получить и $\bar{g}^{ij}$, т. е. элементы матрицы, обратной $\bar{g}_{ij}$:

$$\bar{g}^{ij}=e^{-2\sigma}g^{ij}. \tag{121.13}$$

Действительно, поскольку все элементы матрицы g_{ij} умножились на $e^{2\sigma}$, то, очевидно, элементы обратной матрицы разделятся на то же выражение.

Выясним теперь, как при переходе от метрики g_{ij} к метрике $\bar{g}_{ij}$ изменяются коэффициенты параллельного перенесения. Имеем:

$$\bar{\Gamma}_{i,\,jk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{g}_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial\bar{g}_{ij}}{\partial x^k}-\frac{\partial\bar{g}_{jk}}{\partial x^i}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2\sigma}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)+\frac{1}{2}e^{2\sigma}\left(g_{ik}2\sigma_j+g_{ij}2\sigma_k-g_{jk}2\sigma_i\right),$$

или

$$\bar{\Gamma}_{i,\,jk}=e^{2\sigma}\Gamma_{i,\,jk}+e^{2\sigma}\left(\sigma_j g_{ik}+\sigma_k g_{ij}-\sigma_i g_{jk}\right).$$

Для нас более важна аналогичная формула для $\bar{\Gamma}^k_{ij}$ с поднятым индексом. Вычислим:

$$\bar{\Gamma}^i_{jk}=\bar{g}^{i\alpha}\bar{\Gamma}_{\alpha,\,jk}=e^{-2\sigma}g^{i\alpha}\left(\Gamma_{\alpha,\,jk}+\sigma_j g_{\alpha k}+\sigma_k g_{\alpha j}-\sigma_\alpha g_{jk}\right)e^{2\sigma},$$

или

$$\bar{\Gamma}^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+\delta^i_k\sigma_j+\delta^i_j\sigma_k-\sigma^i g_{jk}. \tag{121.14}$$

Формула (121.14) дает преобразование коэффициентов параллельного перенесения при конформном преобразовании метрики. Вычислим теперь тензор кривизны $\bar{R}_{ik,\,j}{}^{q}$ для преобразованной метрики $\bar{g}_{ij}$. Перепишем (121.14) в виде

$$\bar{\Gamma}^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+T^i_{jk},\quad \text{где}\quad T^i_{jk}=\delta^i_k\sigma_j+\delta^i_j\sigma_k-g_{jk}\sigma^i.$$

Тензор кривизны $\overline{R}_{lk,\,i}{}^{q}$ будет выражаться в таком случае согласно (109.7):

$$\overline{R}_{lk,\,i}{}^{q}-R_{lk,\,i}{}^{q}=\nabla_k T^q_{li}+T^q_{ks}T^s_{li}\,[lk]. \tag{121.15}$$

Мы знаем, что в случае $T^i_{jk}=\delta^i_k\sigma_j+\delta^i_j\sigma_k$ мы получаем формулу (109.9) (в которой нужно заменить, конечно, P_i на σ_i). Но сейчас у нас T^i_{jk} содержит дополнительный член $-\sigma^i g_{jk}$. Этот член порождает в $\nabla_k T^q_{li}$ дополнительное слагаемое $-\nabla_k\sigma^q g_{li}$ и в $T^q_{ks}T^s_{li}$ дополнительные слагаемые:

$$-(\delta^q_k\sigma_s+\delta^q_s\sigma_k)\,\sigma^s g_{li}-\sigma^q g_{ks}(\delta^s_l\sigma_i+\delta^s_i\sigma_l)+\sigma^q g_{ks}\sigma^s g_{li}=$$
$$=-\Delta_1\sigma\delta^q_k g_{li}-\sigma^q\sigma_k g_{li}-\sigma^q\sigma_i g_{kl}-\sigma^q\sigma_l g_{ki}+\sigma^q\sigma_k g_{li}.$$

Второй и пятый члены взаимно уничтожаются, третий пропадет при альтернации. Переписываем (121.15), пользуясь формулой (109.9) и присоединяя в правой части дополнительные слагаемые:

$$\overline{R}_{lk,\,i}{}^{q}=R_{lk,\,i}{}^{q}+\delta^q_l P_{ki}-\delta^q_k P_{li}+\delta^q_i(P_{kl}-P_{lk})-\nabla_k\sigma^q g_{li}+$$
$$+\nabla_l\sigma^q g_{ki}-\Delta_1\sigma\delta^q_k g_{li}+\Delta_1\sigma\delta^q_l g_{ki}-\sigma^q\sigma_l g_{ki}+\sigma^q\sigma_k g_{li}. \tag{121.16}$$

При этом

$$P_{ki}=\nabla_k\sigma_i-\sigma_k\sigma_i;$$

очевидно, $P_{ki}=P_{ik}$ $\left(\text{так как } \nabla_k\sigma_i=\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^k\,\partial x^i}-\Gamma^\alpha_{ki}\sigma_\alpha\right)$. Свертываем (121.16) почленно с равенством

$$\overline{g}_{qj}=e^{2\sigma}g_{qj}.$$

Получим:

$$\overline{R}_{lk,\,ij}=e^{2\sigma}\{R_{lk,\,ij}+g_{lj}P_{ki}-g_{kj}P_{li}-g_{li}(\nabla_k\sigma_j-\sigma_k\sigma_j)+$$
$$+g_{ki}(\nabla_l\sigma_j-\sigma_l\sigma_j)+\Delta_1\sigma(g_{lj}g_{ki}-g_{kj}g_{li})\}.$$

Отсюда окончательно

$$\overline{R}_{lk,\,ij}=e^{2\sigma}\{R_{lk,\,ij}+g_{lj}S_{ki}+g_{ki}S_{lj}-g_{li}S_{kj}-g_{kj}S_{li}\}, \tag{121.17}$$

где

$$S_{jk}=\nabla_j\sigma_k-\sigma_j\sigma_k+\frac{1}{2}g_{kj}\Delta_1\sigma. \tag{121.18}$$

Так преобразуется тензор кривизны при конформном преобразовании римановой метрики. Заметим, что члены фигурной скобки, содержащие тензор S_{ki}, составляются следующим образом: сначала берется член $g_{lj}S_{ki}$, в котором при g стоят крайние, а при S — средние индексы тензора кривизны, а затем этот член подвергается двойной альтернации (без деления) по индексам i, j и l, k, т. е. по индексам каждой пары. Порядок этих альтернаций безразличен.

§ 122. Конформно евклидовы пространства

Мы займемся изучением особого класса римановых пространств, а именно, допускающих конформное отображение на локально евклидово пространство.

Такие римановы пространства называются *конформно евклидовыми*.

Пусть $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ определяет метрику конформно евклидова пространства. Согласно определению мы можем конформно отобразить это пространство на локально евклидово, т. е. каждой его точке $M(x^1, \ldots, x^n)$ поставить в соответствие точку $\overline{M}$ в локально евклидовом пространстве так, что соответствующие дифференциалы дуг будут в каждой точке отличаться лишь множителем e^σ, $\sigma = \sigma(x^1, \ldots, x^n)$.

Пусть $d\overline{s}^2 = \overline{g}_{ij}\,dx^i\,dx^j$ — квадрат соответствующего дифференциала дуги в локально евклидовом пространстве, тогда

$$d\overline{s}^2 = e^{2\sigma}\,ds^2. \tag{122.1}$$

Итак, для того чтобы метрика ds^2 была конформно евклидовой, необходимо и достаточно существование такой функции точки $\sigma = \sigma(x^1, \ldots, x^n)$, что $d\overline{s}^2 = e^{2\sigma}\,ds^2$ определяет локально евклидову метрику.

При изучении конформно евклидовой метрики возникают следующие два вопроса:

1) по каким признакам можно узнать, является ли данное риманово пространство конформно евклидовым, и, если является,

2) найти его отображение на евклидово, т. е. найти множитель $e^{2\sigma}$, превращающий метрику ds^2 в локально евклидову метрику $d\overline{s}^2$.

Оба эти вопроса мы будем решать совместно. Итак, нам дана метрика $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$. Возьмем функцию точки σ, пока произвольную, и составим новую квадратичную форму $d\overline{s}^2 = e^{2\sigma}\,ds^2$. Для того чтобы метрика $d\overline{s}^2$ определяла (хотя бы локально) евклидову метрику, необходимо и достаточно, как мы знаем, обращение в нуль ее тензора кривизны $\overline{R}_{ij,\,kl}$. Другими словами, левая часть (121.17) должна обращаться в нуль, следовательно, скобка в правой части — тоже, что равносильно тому, что $R_{ij,\,kl}$ имеет