член $g_{lj}S_{ki}$, в котором при g стоят крайние, а при S — средние индексы тензора кривизны, а затем этот член подвергается двойной альтернации (без деления) по индексам i, j и l, k, т. е. по индексам каждой пары. Порядок этих альтернаций безразличен.

§ 122. Конформно евклидовы пространства

Мы займемся изучением особого класса римановых пространств, а именно, допускающих конформное отображение на локально евклидово пространство.

Такие римановы пространства называются *конформно евклидовыми*.

Пусть $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ определяет метрику конформно евклидова пространства. Согласно определению мы можем конформно отобразить это пространство на локально евклидово, т. е. каждой его точке $M(x^1, \ldots, x^n)$ поставить в соответствие точку $\overline{M}$ в локально евклидовом пространстве так, что соответствующие дифференциалы дуг будут в каждой точке отличаться лишь множителем e^σ, $\sigma = \sigma(x^1, \ldots, x^n)$.

Пусть $d\overline{s}^2 = \overline{g}_{ij}\,dx^i\,dx^j$ — квадрат соответствующего дифференциала дуги в локально евклидовом пространстве, тогда

$$d\overline{s}^2 = e^{2\sigma}\,ds^2. \qquad (122.1)$$

Итак, для того чтобы метрика ds^2 была конформно евклидовой, необходимо и достаточно существование такой функции точки $\sigma = \sigma(x^1, \ldots, x^n)$, что $d\overline{s}^2 = e^{2\sigma}\,ds^2$ определяет локально евклидову метрику.

При изучении конформно евклидовой метрики возникают следующие два вопроса:

1) по каким признакам можно узнать, является ли данное риманово пространство конформно евклидовым, и, если является,

2) найти его отображение на евклидово, т. е. найти множитель $e^{2\sigma}$, превращающий метрику ds^2 в локально евклидову метрику $d\overline{s}^2$.

Оба эти вопроса мы будем решать совместно. Итак, нам дана метрика $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$. Возьмем функцию точки σ, пока произвольную, и составим новую квадратичную форму $d\overline{s}^2 = e^{2\sigma}\,ds^2$. Для того чтобы метрика $d\overline{s}^2$ определяла (хотя бы локально) евклидову метрику, необходимо и достаточно, как мы знаем, обращение в нуль ее тензора кривизны $\overline{R}_{ij,\,kl}$. Другими словами, левая часть (121.17) должна обращаться в нуль, следовательно, скобка в правой части — тоже, что равносильно тому, что $R_{ij,\,kl}$ имеет вид

$$R_{ij,\,kl}=g_{ik}S_{jl}+g_{jl}S_{ik}-g_{jk}S_{il}-g_{il}S_{jk}, \tag{122.2}$$

где S_{jk} выражается через σ согласно (121.18).

Следовательно, *если пространство конформно евклидово, его тензор кривизны имеет строение* (122.2) *при условии* (121.18). *Обратно: если существует такое* σ, *что выполняется* (122.2) *при условии* (121.18), *то, вычислив для метрики* $d\bar{s}^2=e^{2\sigma}ds^2$ *тензор кривизны, получим нуль, а значит, данная метрика* ds^2 *конформно евклидова.*

Итак, если пространство конформно евклидово, то существует скаляр σ, удовлетворяющий дифференциальному уравнению (121.18) при условии (122.2), следовательно, условия интегрируемости уравнений (121.18) должны удовлетворяться. Но согласно лемме § 121 они имеют вид

$$\nabla_i S_{jk}-\nabla_j S_{ik}=0. \tag{122.3}$$

Итак, необходимым признаком конформно евклидова пространства является у нас *существование симметрического тензора* S_{ik}, *удовлетворяющего уравнениям* (122.2) *и* (122.3). В этой формулировке σ не играет никакой роли и, как мы видим, даже не упоминается. Докажем, что *этот признак и достаточен,* правда, лишь в локальном смысле. Итак, пусть дано, что тензор кривизны имеет вид (122.2), где S_{ik} — некоторый симметрический тензор, удовлетворяющий уравнению (122.3).

Прежде всего выпишем дифференциальные уравнения (121.18) относительно σ, рассматривая σ как неизвестную функцию точки. Так как условия интегрируемости (122.3) выполняются тождественно, то при любых начальных значениях в фиксированной точке M_0

$$\sigma=\sigma_0 \quad \text{и} \quad \sigma_i=(\sigma_i)_0$$

решение уравнений (121.18) существует, а так как (122.2) также имеет место, то по предыдущему пространство конформно евклидово. Конечно, существование решения $\sigma(x^1, \ldots, x^n)$ мы можем гарантировать лишь в некоторой окрестности произвольно выбранной начальной точки M_0, а значит, конформно евклидовым наше пространство будет *лишь локально*; и лишь в этом смысле признак (122.2), (122.3) является и достаточным.

Найденный необходимый и достаточный признак еще не является вполне эффективным.

Позже мы покажем, как фактически установить, существует ли симметрический тензор S_{ik}, удовлетворяющий (122.2) и (122.3). Но и в этой форме из нашего признака можно извлечь некоторые следствия.

Пространство постоянной кривизны обязательно конформно евклидово (по крайней мере, локально).

Для пространства постоянной кривизны, как мы знаем:

$$R_{ij,kl}=K(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}),$$

где

$$K=\text{const}.$$

Перепишем несколько иначе:

$$R_{ij,kl}=g_{jl}\frac{Kg_{ik}}{2}+g_{ik}\frac{Kg_{jl}}{2}-g_{jk}\frac{Kg_{il}}{2}-g_{il}\frac{Kg_{jk}}{2}. \qquad (122.4)$$

Положим:

$$S_{jk}=\frac{Kg_{jk}}{2}. \qquad (122.5)$$

Тогда, как видно из (122.4), условие (122.2) выполняется, и условие (122.3) тоже, так как из (122.5) следует:

$$\nabla_l S_{jk}=0.$$

Итак, для пространства постоянной кривизны существует тензор, удовлетворяющий (122.2) и (122.3).

Впрочем, это видно и из того, что метрика постоянной кривизны реализуется на гиперсфере $S_n\subset R_{n+1}$, а конформно евклидов характер метрики на S_n показан в § 87.

Выведем окончательный вид необходимого и достаточного признака конформно евклидова пространства. Выделим случай $n=2$. Здесь о нашем признаке не приходится говорить, так как все двумерные римановы пространства конформно евклидовы. Действительно, в теории поверхностей доказывается, что на поверхности (локально) всегда можно выбрать изотермические координаты, в которых линейный элемент имеет вид

$$ds^2=\lambda(du^2+dv^2),$$

где

$$\lambda=\lambda(u,\ v),$$

а это и доказывает, что любая метрика V_2 будет (локально) конформно евклидовой; достаточно положить $e^{2\sigma}=\frac{1}{\lambda}$, $d\bar{s}^2=du^2+dv^2$. Аналогичное предложение можно доказать и в псевдоримановом случае.

В дальнейшем будем предполагать, что $n>2$.

Поставим задачу: допустив, что (122.2) удовлетворяется, вычислить отсюда тензор S_{ij}.

Прежде всего найдем R_{jk}, свертывая (122.2) с g^{il} почленно (см. (110.12)):

$$R_{jk} = R_{ij,kl} g^{il} = \delta^l_k S_{jl} + \delta^i_j S_{ik} - g_{jk} S - n S_{jk},$$

так как $g^{il} g_{ik} = \delta^l_k$, $g^{il} g_{il} = \delta^l_l = n$; при этом мы обозначили $S = g^{il} S_{il}$. Окончательно

$$R_{jk} = -S g_{jk} - (n-2) S_{jk}. \tag{122.6}$$

Отсюда мы еще не в состоянии определить S_{jk}, так как нам неизвестно S. Произведем почленно свертывание с g^{jk}; получим слева так называемую скалярную кривизну R (см. (110. 14)):

$$R = -Sn - (n-2) S = -2(n-1) S,$$

откуда

$$S = -\frac{R}{2(n-1)}.$$

Теперь из (122.6) вычислим S_{jk}:

$$S_{jk} = -\frac{R_{jk}}{n-2} + \frac{R g_{jk}}{2(n-1)(n-2)}. \tag{122.7}$$

Итак, если тензор S_{jk}, удовлетворяющий (122.2), существует, то он обязательно имеет вид (122.7).

Теперь уже легко проверить, существует ли действительно тензор, удовлетворяющий условиям (122.2) и (122.3). Для этого нужно подставить выражение S_{jk} из (122.7) в (122.2) и (122.3). Если эти уравнения обратятся в тождества (чего в общем случае не будет), то данное пространство конформно евклидово (по крайней мере, локально), и обратно.

Теперь искомый признак получен в достаточно эффективной форме. Остается только внести сюда некоторые уточнения. Рассмотрим два случая.

1. $n = 3$. В этом случае тензоры $R_{ij,kl}$ и S_{jk} имеют по шесть существенно различных координат, и, рассматривая (122.2) как шесть линейных уравнений с шестью неизвестными S_{jk}, естественно ожидать, что такие S_{jk} всегда можно найти. Как показало бы более детальное исследование, дело обстоит действительно так. Следовательно, S_{jk}, удовлетворяющие (122.2), существуют при $n = 3$ в любом пространстве, а так как они обязательно имеют вид (122.7), то остается проверить, удовлетворится ли (122.3) при подстановке S_{jk} из (122.7). Таким образом, из двух условий остается лишь (122.3), так как (122.2) удовлетворяется тождественно.

2. $n > 3$. Здесь, наоборот, является достаточным уже одно условие (122.2). Что же касается (122. 3), то оно является следствием (122.2), так что его не приходится оговаривать особо.

Кратко наметим доказательство. Возьмем тождество Бианки (108.6), причем оба индекса, не участвующие в циклировании, поднимем наверх:

$$\nabla_m R_{ij..}^{\cdot\cdot kl} + \nabla_i R_{jm..}^{\cdot\cdot kl} + \nabla_j R_{mi..}^{\cdot\cdot kl} = 0.$$

Как легко получить из (122.2), $R_{ij..}^{\cdot\cdot kl} = \delta_{[i}^{k} S_{j]}^{l} - \delta_{[i}^{l} S_{j]}^{k}$ (альтернация без деления на 2), а следовательно, тождество Бианки примет вид

$$\nabla_m S_{[i}^{[k} \delta_{j]}^{l]} + \nabla_i S_{[j}^{[k} \delta_{m]}^{l]} + \nabla_j S_{[m}^{[k} \delta_{i]}^{l]} = 0.$$

Положим здесь $l = i$, а в остальном индексы пусть будут различны между собой*). По свойствам δ_q^p получаем $\nabla_j S_m^k - \nabla_m S_j^k = 0$ при k, m, j, различных между собой. Положим теперь $l = i$, $k = j$; в остальном индексы различны. Получаем (без суммирования!)

$$-\nabla_{[m} S_{j]}^{j} - \nabla_{[m} S_{i]}^{i} = 0$$

при любых i, j, m, различных между собой. При фиксированном m даем i и j значения последовательно p, q; q, r; r, p; из полученных трех уравнений с тремя неизвестными вытекает, что каждое слагаемое есть нуль:

$$\nabla_{[m} S_{i]}^{i} = 0.$$

Итак, всегда $\nabla_{[m} S_{j]}^{k} = 0$, т. е. (122.3) доказано.

Нашим результатам можно придать следующую форму. В произвольном римановом пространстве построим тензор конформной кривизны $C_{ij,kl}$, определяемый следующим образом:

$$C_{ij,kl} = R_{ij,kl} + \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}) + \\ + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{jk}g_{il} - g_{jl}g_{ik}). \qquad (122.8)$$

Легко проверить, что если в (122.2) перенести все члены в левую часть, причем подставить вместо S_{jk} его значение из (122.7), то в левой части мы получим как раз тензор $C_{ij,kl}$.

Отсюда следует, что (122.2) можно записать в виде

$$C_{ij,kl} = 0.$$

Итак, *тензор конформной кривизны* $C_{ij,kl}$ существует в любом римановом пространстве, причем его обращение в нуль в данном пространстве есть необходимый и достаточный признак того, что

*) Здесь мы пользуемся условием $n > 3$, т. е. тем, что всегда можно взять четыре различных индекса.

данное пространство (локально) конформно евклидово, если только $n > 3$. В случае же $n = 3$ условие (122.2) удовлетворяется всегда, и, следовательно, $C_{ij,kl}$ всегда равен нулю.

Тензор $C_{ij,kl}$, как легко проверить, обладает всеми алгебраическими свойствами тензора кривизны.

При произвольном конформном преобразовании произвольной римановой метрики согласно (121.4) тензор $C_{ij,kl}$ испытывает преобразование

$$\overline{C}_{ij,kl} = e^{2\sigma} C_{ij,kl}, \tag{122.9}$$

что проверяется на основе (121.17). Отсюда, используя (121.13), получаем, что *тензор* $C_{ij,k}{}^{p}$ $(= C_{ij,kl} g^{lp})$ *инвариантен при конформном преобразовании римановой метрики.*