ГЛАВА X

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 123. Пространство событий в общей теории относительности

Мы уже упоминали о том, что физическое содержание общей теории относительности сводится к объяснению одного лишь явления — явления всемирного тяготения. Несмотря на это, общая теория относительности требует по сравнению со специальной весьма широкого обобщения математического аппарата, а именно, перехода от четырехмерного *псевдоевклидова* пространства событий к четырехмерному же *псевдориманову* пространству. В пространстве событий специальной теории относительности в ортонормированной координатной системе x^0, x^1, x^2, x^3 скалярный квадрат вектора выражался формулой

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}.$$

Рассматривая это псевдоевклидово пространство как частный случай риманова, мы можем записать его метрическую квадратичную форму в виде

$$ds^2 = -dx^{0^2} + dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}. \qquad (123.1)$$

При этом x^0, x^1, x^2, x^3 имеют физический смысл ct, x, y, z в некоторой инерциальной системе отсчета. Ортонормированные координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в этой главе мы будем называть *галилеевыми*.

Первая гипотеза, положенная в основу общей теории относительности, заключается в том, что описанное положение вещей имеет место лишь в некотором приближении. В действительности же *метрика в пространстве событий является не псевдоевклидовой, а псевдоримановой*, хотя и весьма мало отличающейся от псевдоевклидовой. В связи с этим в пространстве событий *не существует галилеевых координат, в которых метрическая квадратичная форма принимала бы вид* (123.1), но зато существуют координаты, близкие по своим свойствам к галилеевым.

В этих координатах метрическая квадратичная форма имеет запись, близкую к (123.1):

$$ds^2 = -dx^{0^2} + dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2} + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \tag{123.2}$$

Здесь $\gamma_{ij} dx^i dx^j$ — некоторая добавочная квадратичная форма; ее коэффициенты представляют собой функции от x^0, x^1, x^2, x^3:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3), \tag{123.3}$$

абсолютные значения которых весьма малы по сравнению с единицей: $|\gamma_{ij}| \ll 1$.

Так как $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, где g_{ij} — координаты метрического тензора, то, сравнивая с (123.2), получаем:

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \gamma_{ij}, \tag{123.4}$$

где

$$\overset{\circ}{g}_{ij} = 0 \ (i \neq j), \quad \overset{\circ}{g}_{00} = -1, \quad \overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha} = 1. \tag{123.5}$$

(Греческие индексы здесь и в дальнейшем пробегают значения 1, 2, 3, а латинские 0, 1, 2, 3.)

Координаты x^i, близкие к галилеевым, не отличаются такой же определенностью выбора, как галилеевы координаты. Действительно, галилеевы (т. е. ортонормированные) координаты в псевдоевклидовом пространстве специальной теории относительности выбираются с точностью до линейного, а именно, псевдоортогонального преобразования, отвечающего переходу от одного ортонормированного репера к другому. Возможность такого преобразования остается, очевидно, и для наших координат x^i, близких к галилеевым (при условии, что коэффициенты преобразования не слишком велики), но, кроме того, мы можем делать над x^i и любые (нелинейные) малые преобразования:

$$x^{i'} = x^i + \xi^i(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{123.6}$$

Под малостью этого преобразования мы подразумеваем, что

$$\left|\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right| \ll 1, \tag{123.7}$$

т. е. абсолютные значения $\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}$ весьма малы по сравнению с единицей. На значения самих $\xi^i(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$ мы ограничений не накладываем. Для нас существенно лишь, чтобы они *медленно менялись* при изменении x^i, если же при этом они сами по себе имеют большие значения, то это можно отнести за счет тривиального преобразования — добавления констант к координатам x^i:

$$x^{i'} = x^i + c^i.$$

При условии (123.7) координаты x^i, близкие к галилеевым, сохраняют это свойство и после преобразования. Действительно, запишем преобразование, обратное (123.6):

$$x^i = x^{i'} + \xi^{i'}(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \tag{123.8}$$

при условии

$$\left|\frac{\partial \xi^{i'}}{\partial x^{j'}}\right| \ll 1. \tag{123.9}$$

В таком случае

$$dx^i = dx^{i'} + \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial x^{j'}} dx^{j'}.$$

Вставляя эти выражения в (123.2), мы получаем:

$$ds^2 = -(dx^{0'})^2 + (dx^{1'})^2 + (dx^{2'})^2 + (dx^{3'})^2 + \gamma_{i'j'}\, dx^{i'}\, dx^{j'},$$

где в квадратичной форме $\gamma_{i'j'}\, dx^{i'}\, dx^{j'}$ объединены все оставшиеся члены. Коэффициенты при всех этих членах будут весьма малы сравнительно с единицей, так как они обязательно будут содержать множителем или $\frac{\partial \xi^{i'}}{\partial x^{j'}}$ или γ_{ij}, или то и другое одновременно (переход от γ_{ij} к $\gamma_{i'j'}$ не носит тензорного характера). Следовательно, мы получаем снова

$$|\gamma_{i'j'}| \ll 1.$$

Итак, координаты x^i, близкие к галилеевым, сохраняют это свойство не только при псевдоортогональных преобразованиях (таких же, как в специальной теории относительности), но и при любых малых преобразованиях (123.6). Это создает гораздо большую неопределенность в их выборе.

В дальнейшем мы всегда будем рассматривать пространство событий в координатах x^i, близких к галилеевым, не оговаривая этого каждый раз особо.

Пространственно-временная геометрия в наших координатах по сравнению с пространственно-временной геометрией в галилеевых координатах специальной теории относительности будет выглядеть искаженной. Это искажение частью обусловливается тем, что сама метрика у нас теперь не псевдоевклидова, а псевдориманова, частью выбором координат x^i. В общем случае нет возможности каким-либо строго определенным образом отделить одну причину от другой. В самом деле, наши координаты x^i (близкие к галилеевым) можно подвергать, в частности, малым преобразованиям (123.6), и среди различных таких координатных систем нет оснований одну предпочесть другой. Между тем в каждой из них искажение пространственно-временной геометрии выражается по-своему.

Однако это искажение во всяком случае настолько мало (вследствие малости γ_{ij}), что непосредственными пространственно-временными измерениями установлено быть не может. Забегая вперед, скажем, что оно физически проявится в виде *поля тяготения*, наблюдаемого в данной системе отсчета x^i. В этом и будет заключаться объяснение явлений тяготения, даваемое общей теорией относительности.

§ 124. Локально галилеевы координаты

Хотя мы и не можем теперь подобрать координат x^i, которые были бы галилеевыми во всем пространстве событий, но можем сделать это для бесконечно малой окрестности любой точки M этого пространства. Для этого мы перейдем в систему координат x^i, геодезическую в данной точке M, т. е. такую, что

$$|\Gamma^k_{ij}|_M = 0. \tag{124.1}$$

В § 91 было показано, что это можно сделать в любом пространстве аффинной связности без кручения L^0_n, а значит, в частности, и в любом римановом пространстве V_n. Кроме того, будем считать для простоты, что точка M служит началом координат, $x^i_M = 0$. Чтобы этого добиться, достаточно сделать тривиальное преобразование координат x^i, вычитая из них начальные значения x^i_M. Далее, мы будем предполагать, что метрический тензор g_{ij} имеет в точке M «галилеев» вид (123.5):

$$[g_{ij}]_M = \overset{\circ}{g}_{ij}. \tag{124.2}$$

Этого нетрудно добиться линейным преобразованием геодезических координат

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i,$$

где константы $A^{i'}_i$ подобраны так, чтобы квадратичная форма $[g_{ij}]_M \, dx^i dx^j$ была приведена к виду $\overset{\circ}{g}_{ij} dx^i dx^j$, т. е. к каноническому виду $-dx^{0^2} + dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}$. Линейное преобразование не меняет геодезического характера координат (§ 91).

Координаты x^i со свойствами (124.1), (124.2) мы будем называть *локально галилеевыми* в точке M. Значение этих координат заключается в том, что в бесконечно малой окрестности точки M эти координаты приближаются по своим свойствам к галилеевым. В самом деле, в силу (124.1) Γ^k_{ij} остаются в пределах этой окрестности если и не равными нулю, то во всяком случае величинами бесконечно малыми.