заметных физических явлений — явлений тяготения. Разумеется, этот «более удачный» выбор локально галилеевых координат достигается за счет малой области их применения; между тем в § 123 мы рассматривали координаты x^i, пригодные в больших областях пространства событий.

§ 125. Тензор энергии-импульса в общей теории относительности

Распределение и движение энергии и импульса в пространстве описываются в общей теории относительности так же, как и в специальной, симметрическим тензором энергии-импульса:

$$T^{ij} = T^{ij}(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{125.1}$$

Разница лишь в том, что пространство событий, в котором задается это тензорное поле, уже не псевдоевклидово, а псевдориманово. Мы имели ранее (§ 71) физическое истолкование тензора энергии-импульса в галилеевых координатах: T^{00} — плотность энергии в соответствующей инерциальной системе и т. д.

Такое же истолкование мы приписываем тензору энергии-импульса теперь в локально галилеевых координатах: T^{00} — *плотность энергии* в соответствующей локально инерциальной системе и т. д. Конечно, и в координатах x^i, близких к галилеевым (§ 123), тензор T^{ij} имеет с известным приближением, практически удовлетворительным, то же физическое истолкование. При этом мы считаем, что тензор энергии-импульса T^{ij} учитывает суммарное распределение и движение всех видов энергии и импульса *за исключением энергии и импульса гравитационного происхождения*. Мы выделяем, таким образом, явления тяготения в особый разряд; это связано с тем, что физическое содержание общей теории относительности как раз и сводится к объяснению этих явлений.

Как и в специальной теории относительности, мы требуем, чтобы тензор T^{ij} был подчинен закону сохранения энергии-импульса. Этот закон в *специальной теории относительности* в галилеевых координатах имел вид (72.13):

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} = 0 \quad (j = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{125.2}$$

Если бы мы захотели записать его в виде, пригодном для любой координатной системы, то нам пришлось бы заменить частные производные абсолютными:

$$\nabla_i T^{ij} = 0. \tag{125.3}$$

Действительно, в такой записи мы получаем инвариантное соотношение, так как оно выражает обращение в нуль некоторого тензора.

В общей теории относительности мы не имеем в своем распоряжении галилеевых координат и *накладываем поэтому на тензор* T^{ij}

соответствующее условие сразу в инвариантном виде (125.3). При этом в локально галилеевых координатах мы возвращаемся к записи (125.2) ввиду того, что Γ^k_{ij} будут в этом случае практически равны нулю. Отсюда следует, что в локально галилеевых координатах можно повторить все выкладки § 72 и обнаружить снова, что наложенное на T^{ij} условие действительно выражает закон сохранения энергии-импульса.

В произвольной координатной системе, где величинами Γ^k_{ij} пренебрегать нельзя, условие (125.3) нельзя переписать в виде (125.2) и истолковать по образцу § 72 как закон сохранения энергии-импульса. Это объясняется тем, что *энергия и импульс гравитационного происхождения не учитываются тензором* T^{ij}. Между тем закон сохранения энергии-импульса будет справедлив, разумеется, лишь при учете энергии и импульса любого происхождения. Поэтому для записи закона сохранения приходится присоединять к тензору T^{ij} еще особый дифференциально-геометрический объект t^{ij} (не тензор!), описывающий распределение и перемещение энергии и импульса гравитационного происхождения. Здесь мы сталкиваемся со слабым пунктом теории, так как ввести t^{ij} удается лишь весьма формальным и искусственным путем. В локально галилеевых координатах это усложнение излишне, потому что гравитационные явления практически отсутствуют, и тензор T^{ij} полностью описывает поведение энергии-импульса (а t^{ij} обращается практически в нуль).

Вторая основная гипотеза общей теории относительности состоит в следующем. В отличие от специальной теории относительности, где тензор энергии-импульса T^{ij} *накладывается на пространство событий в качестве дополнительной конструкции*, мы принимаем теперь, что тензор энергии-импульса вытекает из самой псевдоримановой геометрии этого пространства, а именно, определяется формулой

$$-\varkappa T_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}. \tag{125.4}$$

Здесь T_{ij} — тензор энергии-импульса с опущенными (при помощи метрического тензора g_{ij}) индексами; R_{ij} — тензор Риччи и R — скалярная кривизна в псевдоримановом пространстве событий:

$$R_{jk} = R_{ij,\,kl}\, g^{il} = R^{i\cdot}_{\cdot j,\,k\,i}, \quad R_{jk} = R_{kj}, \quad R = R_{jk} g^{jk}. \tag{125.5}$$

Наконец, $\varkappa$ — некоторая положительная константа, значение которой будет найдено позже.

Заметим, что, указывая основные гипотезы общей теории относительности, мы обращаем внимание не на те ее стороны, которые повторяют специальную теорию, а на те, которыми она существенно отличается.

Общий смысл гипотезы (125.4) заключается в том, что геометрия пространства событий тесно связана с распределением и перемещением энергии-импульса. Формально при этом тензор энергии-импульса T_{ij} определяется через геометрию пространства событий, именно через его тензор кривизны и метрический тензор. Однако с физической точки зрения более естественно трактовать эту связь в обратном порядке: *распределение и движение масс в физическом пространстве отражаются определенным образом на псевдоримановой геометрии пространства событий.* В грубых чертах уже сейчас видно, что чем больше будет концентрация масс в данном месте и в данное время, тем интенсивнее будет отклоняться псевдориманова геометрия от псевдоевклидовой на соответствующем участке пространства событий: действительно, с увеличением координат тензора T_{ij} должны увеличиваться и координаты тензора Риччи R_{ij}, а следовательно, в каком-то смысле и координаты тензора кривизны $R_{ij,kl}$.

Заметим, что вместо распределения и движения энергии-импульса мы стали говорить о распределении и движении масс. Это законно, если принять во внимание, что всякому запасу энергии E отвечает масса $\frac{E}{c^2}$ и обратно; что же касается импульса, то его распределение описывается теми же координатами тензора T^{ij}, что и перемещение масс; перемещение же импульса практически не будет играть роли в создании поля тяготения (а как раз в этом с физической точки зрения выразится влияние тензора T_{ij} на пространственно-временную геометрию).

Однако все еще остается неясным, из каких соображений тензор T_{ij} связан с метрикой пространства событий именно формулой (125.4). Здесь можно сделать следующие пояснения.

Мы хотим установить зависимость между T_{ij} и метрикой пространства событий, приравняв T_{ij} некоторому симметрическому тензору, связанному с этой метрикой. Конечно, этот тензор вместе с T_{ij} должен удовлетворять закону сохранения (125.3). Простейшим из таких тензоров будет, как мы сейчас увидим, $R_{ij}-\frac{1}{2}Rg_{ij}$, стоящий в правой части (125.4). К этому тензору можно присоединить постоянный множитель, не нарушая его свойств; это мы и делаем (множитель $-1/\varkappa$). Заметим, что сам метрический тензор g_{ij} также обладает требуемыми свойствами и еще более прост, но явно непригоден для наших целей.

Разумеется, приведенные соображения никак нельзя считать доказательством того, что тензор энергии-импульса действительно имеет вид (125.4). Настоящим оправданием этой гипотезы является вытекающая из нее теория тяготения, как мы увидим ниже, хорошо согласующаяся с опытом.

Проверим теперь, что симметрический тензор $R_{ij}-\frac{1}{2}Rg_{ij}$ действительно удовлетворяет закону сохранения. Для этой цели используем тождество Бианки — Падова (108.6), имеющее место в любом L_n^0 и, в частности, в любом римановом пространстве:

$$\nabla_m R_{kl,\,i\cdot}^{\cdot\cdot\,\cdot q}+\nabla_k R_{lm,\,i\cdot}^{\cdot\cdot\,\cdot q}+\nabla_l R_{mk,\,i\cdot}^{\cdot\cdot\,\cdot q}=0.$$

Произведем здесь свертывание по индексам k, q; получим:

$$\nabla_m R_{li}+\nabla_k R_{lm,\,i\cdot}^{\cdot\cdot\,\cdot k}-\nabla_l R_{mi}=0.$$

Прежде чем производить свертывание, мы в последнем члене переставили индексы m, k, компенсировав это изменением знака. Последнее равенство можно переписать в виде

$$\nabla_m R_{li}+g^{kj}\nabla_k R_{lm,\,ij}-\nabla_l R_{mi}=0.$$

Напомним, что под знак абсолютного дифференцирования можно вносить (и выносить из-под него) метрический тензор, стоящий множителем; в частности, поднятие и опускание индексов можно производить под знаком абсолютного дифференцирования. В среднем члене переставим i и j, компенсировав это изменением знака, и свертываем наше равенство с g^{li}. Получим:

$$\nabla_m R-g^{kj}\nabla_k R_{mj}-g^{li}\nabla_l R_{mi}=0.$$

Замечая, что второй и третий члены отличаются лишь обозначениями индексов суммирования, и внося метрический тензор под знак абсолютной производной, получаем окончательно:

$$\nabla_m R=2\nabla_k R_{m\cdot}^{\cdot k}. \tag{125.6}$$

Это тождество, имеющее место в любом римановом пространстве, как раз и выражает, что тензор

$$\overset{*}{R}_{ij}=R_{ij}-\frac{1}{2}Rg_{ij}$$

удовлетворяет закону сохранения. В самом деле, поднимая индекс j, получаем: $\overset{*}{R}{}_{i\cdot}^{\cdot j}=R_{i\cdot}^{\cdot j}-\frac{1}{2}R\delta_i^j$.

Вычисляем теперь:

$$\nabla_j \overset{*}{R}{}_{i\cdot}^{\cdot j}=\nabla_j R_{i\cdot}^{\cdot j}-\frac{1}{2}\nabla_j R\delta_i^j=\nabla_j R_{i\cdot}^{\cdot j}-\frac{1}{2}\nabla_i R=0.$$

Равенство нулю имеет место в силу (125.6). Поднимая индекс i, получим окончательно:

$$\nabla_j \overset{*}{R}{}^{ij}=0,$$

а это и есть закон сохранения (в силу симметрии тензоров $\overset{*}{R}_{ij}$ и $\overset{*}{R}{}^{ij}$ безразлично, какой из двух верхних индексов участвует в свертывании).