§ 126. Движение частицы в поле тяготения

Мы уже несколько раз упоминали о том, что уклонение метрики пространства событий от евклидовой и, следовательно, невозможность подобрать в этом пространстве событий галилеевы координаты физически проявляются в первую очередь в виде поля тяготения. Сейчас мы выясним механизм появления этого поля.

Рассмотрим поток частиц (обладающих каждая определенной массой покоя), перенося в общую теорию относительности построение § 68. В идеализированном виде мы рассматриваем этот поток частиц как поток непрерывно распределенных масс. Каждая частица, меняя с течением времени свое положение, описывает в пространстве событий четырехмерную траекторию

$$x^i = x^i(\sigma) \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{126.1}$$

которая, как и в специальной теории относительности, будет кривой чисто мнимой длины. Последнее видно уже из того, что отдельные (малые) куски траектории можно рассматривать в локально галилеевой системе координат, в которой практически имеют место все результаты специальной теории относительности, в частности, четырехмерные траектории частиц — кривые чисто мнимой длины.

Обозначая длину дуги вдоль четырехмерной траектории (отсчитываемую от какой-нибудь начальной точки) через

$$s = \sigma i,$$

мы принимаем за параметр вещественный коэффициент σ. Тогда касательный к траектории вектор

$$\tau^i = \frac{dx^i}{d\sigma}$$

будет мнимоединичным:

$$g_{ij}\tau^i\tau^j = \frac{g_{ij}\,dx^i\,dx^j}{d\sigma^2} = \frac{ds^2}{d\sigma^2} = -1. \tag{126.2}$$

Через каждую точку M пространства событий проходит определенная четырехмерная траектория, а потому вектор τ^i определен в каждой точке M:

$$\tau^i = \tau^i(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3). \tag{126.3}$$

С каждой точкой M четырехмерной траектории частицы можно связать локально галилееву координатную систему, относительно которой частица будет в данный момент покоящейся. В самом деле, выбрав сначала произвольную локально галилееву координатную систему x^i

в окрестности точки M, мы подвергнем ее (совершенно так же, как в специальной теории относительности) псевдоортогональному преобразованию (62.10) с таким расчетом, чтобы координатная линия x^0 в точке M имела вектор τ^i касательным вектором, т. е. чтобы

$$\tau_M^0 = 1, \quad \tau_M^1 = \tau_M^2 = \tau_M^3 = 0.$$

Обозначим через μ_0 плотность *масс покоя* относительно нашей локально галилеевой системы отсчета, «*увлекаемой потоком*». В каждой точке пространства событий μ_0 имеет, вообще говоря, свое значение, так что

$$\mu_0 = \mu_0 (x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{126.4}$$

Чтобы не усложнять дела, мы предположим, что в процессе движения частицы не испытывают никаких превращений, масса покоя каждой из них остается без изменения, так что суммарная масса покоя удовлетворяет закону сохранения (заметим, что в общем случае этого утверждать нельзя; например, при так называемой аннигиляции электрона и позитрона масса покоя возникающих при этом фотонов равна нулю). Условие сохранения массы покоя имеет вид

$$\nabla_i (\mu_0 \tau^i) = 0, \tag{126.5}$$

т. е. четырехмерная дивергенция векторного поля

$$s^i = \mu_0 (x^0, x^1, x^2, x^3)\, \tau^i (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

равна нулю. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть условие (126.5) в локально галилеевой координатной системе, т. е. с точки зрения *некоторой локально инерциальной системы отсчета* *). Так как в этом случае Γ_{ij}^k практически равны нулю, то условие (126.5) принимает вид

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^i} = \frac{\partial (\mu_0 \tau^i)}{\partial x^i} = 0. \tag{126.6}$$

Вектор s^i составлен по образцу (68.12), где нужно лишь заменить *плотность заряда плотностью массы покоя*. Масса покоя имеет с зарядом то общее свойство, что она инвариантна относительно выбора инерциальной (в нашем случае локально инерциальной) системы отсчета. Поэтому в нашем случае мы совершенно таким же путем, как и в § 68, приходим к формулам (68.13):

$$s^0 = \tilde{\mu}_0, \qquad s^1 = \tilde{\mu}_0 \frac{u_x}{c}, \qquad s^2 = \tilde{\mu}_0 \frac{u_y}{c}, \qquad s^3 = \tilde{\mu}_0 \frac{u_z}{c}, \tag{126.7}$$

---

*) Уже не связанной каким-либо образом с потоком.

где $\tilde{\mu}_0$ — плотность масс покоя и u_x, u_y, u_z — составляющие скорости *с точки зрения нашей локально инерциальной системы отсчета* (*плотность* масс покоя уже *не инвариантна*). При этом ct, x, y, $z = x^0$, x^1, x^2, x^3. Теперь (126.6) принимает вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\mu}_0}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial(\tilde{\mu}_0 u_x)}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial(\tilde{\mu}_0 u_y)}{\partial y}+\frac{1}{c}\frac{\partial(\tilde{\mu}_0 u_z)}{\partial z}=0. \qquad (126.8)$$

Рассмотрим какую-нибудь область ω, ограниченную замкнутой поверхностью Π, которая покоится с точки зрения нашей локально инерциальной системы. Умножим равенство (126.8) почленно на элемент объема $d\omega$ и проинтегрируем по области ω. Получим $\left(\text{отбрасывая множитель } \frac{1}{c}\right)$:

$$\iiint\limits_{\omega}\frac{\partial\tilde{\mu}_0}{\partial t}\,d\omega+\iiint\limits_{\omega}\left\{\frac{\partial(\tilde{\mu}_0 u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\tilde{\mu}_0 u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\tilde{\mu}_0 u_z)}{\partial z}\right\}d\omega=0.$$

Выносся в первом интеграле дифференцирование по t за знак интеграла и преобразуя второй интеграл к поверхностному интегралу по формуле Остроградского, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\omega}\tilde{\mu}_0\,d\omega=-\iint\limits_{\Pi}\tilde{\mu}_0\mathbf{un}\,dS. \qquad (126.9)$$

Здесь $\mathbf{u}$ — *вектор скорости потока масс*, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали поверхности Π.

Если умножить полученную формулу почленно на dt, то она будет означать, что приращение массы покоя, заключенной в ω, за время dt равно количеству массы покоя, втекшей через границу области dt за то же время (ср. (16.3); знак минус у интеграла в правой части означает, что мы оцениваем именно *втекание* массы покоя). Мы, действительно, получаем условие сохранения массы покоя. Конечно, обратным переходом мы можем от (126.9) вернуться к (126.6) (используя, между прочим, что (126.9) имеет место для *любой* области ω). Итак, смысл условия (126.5) теперь ясен.

Допустим, что поток частиц движется под влиянием *только* лишь сил тяготения (в частности, по инерции), так что в области, занятой потоком, отсутствуют какие-либо иные физические факторы, способные влиять на движение частиц. Тогда в этой области тензор энергии-импульса будет выражаться формулой (71.3):

$$T^{ij}=\mu_0 c^2\tau^i\tau^j. \qquad (126.10)$$

Действительно, эта формула выражает тензор энергии-импульса, отвечающий потоку масс; но ввиду того что поле тяготения не порождает тензора энергии-импульса, а другие физические факторы, как мы предполагаем, отсутствуют, то мы получаем здесь полный тензор энергии-импульса (в области, занятой потоком).

Формулу (71.3) мы, строго говоря, можем применять лишь в локально галилеевых координатах, так как в них мы возвращаемся практически к специальной теории относительности. Но в силу тензорного характера этой формулы она будет иметь тот же вид и в любой криволинейной координатной системе. В этом смысле мы ее и будем понимать.

Тензор энергии-импульса должен удовлетворять закону сохранения энергии-импульса:

$$\nabla_i T^{ij} = 0,$$

который в силу (126.10) можно записать в виде

$$c^2 \nabla_i (\mu_0 \tau^i) \tau^j + c^2 \mu_0 \tau^i \nabla_i \tau^j = 0.$$

Вследствие (126.5) первый член исчезает, и мы получаем окончательно:

$$\tau^i \nabla_i \tau^j = 0.$$

Так как $\tau^i = \frac{dx^i}{d\sigma}$, то отсюда следует:

$$dx^i \nabla_i \tau^j = 0, \text{ т. е. } D\tau^j = 0, \tag{126.11}$$

где абсолютный дифференциал берется вдоль четырехмерной траектории частицы $\left(\text{как и производные } \frac{dx^i}{d\sigma}\right)$. Мы получили, следовательно, что касательный к четырехмерной траектории вектор τ^j переносится вдоль нее параллельно; эта траектория есть, таким образом, геодезическая. *Итак, четырехмерные траектории потока частиц, движущихся под действием только лишь поля тяготения (в частности, по инерции), суть геодезические линии чисто мнимой длины.*

Отдельное физическое тело, движущееся при тех же условиях, мы тоже рассматриваем как поток составляющих его частиц и применяем к нему полученный результат. Практически здесь наиболее важно, что, пренебрегая размерами этого тела и представляя его себе как *точку, можно считать, что закон его движения выражается в пространстве событий геодезической четырехмерной траекторией чисто мнимой длины.*

Аналогичным образом мы принимаем, что распространение световых лучей (в пустоте) происходит с точки зрения пространства событий также *по геодезическим четырехмерным траекториям, но при этом, в отличие от предыдущего, изотропным.*

В самом деле, с точки зрения локально галилеевых координат можно считать Γ^k_{ij} равными нулю, и мы возвращаемся практически к псевдоевклидову пространству специальной теории относительности. Тогда в пределах нашей локально галилеевой координатной системы геодезические принимают вид прямых, в частности, изотропные геодезические — вид изотропных прямых, которые и служат четырехмерными траекториями световых лучей, а это вполне согласуется с положением вещей в специальной теории относительности.

Более глубоким обоснованием нашего утверждения мы здесь заниматься не можем.

§ 127. Основная идея общей теории относительности

Если мы находимся в локально галилеевой координатной системе, то геодезические линии практически принимают вид прямых, а следовательно, движение частиц под действием поля тяготения совершается с точки зрения этой координатной системы равномерно и прямолинейно; другими словами, движение в поле тяготения сводится к движению по инерции, так что поле тяготения по существу отсутствует. Однако если мы интересуемся такой областью пространства событий, в которой нельзя ввести локально галилеевых координат (или, хотя и можно, но нецелесообразно), то мы прибегаем к координатам x^i, лишь близким к галилеевым (§ 123). В них уже даже с практической точки зрения нельзя считать геодезические линии «прямыми» (т. е. задавать x^1, x^2, x^3 линейными функциями x^0), так как в дифференциальных уравнениях геодезических

$$\frac{d^2x^i}{d\sigma^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\sigma}\frac{dx^k}{d\sigma}=0 \qquad (127.1)$$

уже нельзя считать $\Gamma^i_{jk}=0$. Криволинейный характер геодезических означает нелинейную зависимость x^1, x^2, x^3 от x^0, т. е. неравномерный и криволинейный характер движения частиц под влиянием поля тяготения. Таким образом, поле тяготения в этом случае фактически имеет место (не равно нулю).

Итак, поле тяготения, наблюдаемое относительно данной (близкой к галилеевой) координатной системы x^i, характеризуется поведением геодезических линий в координатах x^i. Говоря грубо, чем более геодезические линии отличаются при этом от «прямых», тем сильнее будет поле тяготения, наблюдаемое в данной системе отсчета. В разных координатных системах x^i уравнения геодезических будут иметь различный вид, а потому и поле тяготения будет выглядеть по-разному. Так, в неподвижно висящем лифте наблюдается такое же поле тяготения, как и на поверхности земли; в ускоренно