естественным системам отсчета. Следовательно, утверждение о равноправии всех систем отсчета следует рассматривать как формальное и по существу бессодержательное. В связи с этим приходится практически отличать реальное, неустранимое поле тяготения, вызванное распределением масс, от «фиктивного», вызванного неудачным выбором системы отсчета. Правда, мы в общем случае не умеем провести границу между ними, так как ведут они себя одинаково, но не исключено, что в каком-то смысле и это может быть достигнуто*).

§ 128. Приближенная теория

Как известно, ньютонова теория тяготения с величайшей точностью объясняет движения небесных тел, и огромный опытный материал, накопленный в течение столетий, хорошо укладывается в ее рамки. Поэтому от новой теории тяготения мы должны прежде всего потребовать, чтобы она была не хуже старой, т. е. чтобы она приводила практически к тем же или почти тем же результатам, что и ньютонова теория. Мы увидим в этом параграфе, что дело именно так и обстоит: *в первом приближении новая теория тяготения приводит к ньютоновой теории.* Расхождение же между этими теориями оказывается чрезвычайно незначительным и в большинстве случаев находится за пределами опыта. Существует лишь ограниченное число экспериментов, при которых может быть фактически наблюдено и измерено то ничтожное отклонение от ньютоновой теории, к которому приводит новая теория тяготения. Эти эксперименты говорят в ее пользу.

Мы займемся теперь исследованием хода геодезических, т. е. изучением поля тяготения в некоторой координатной системе x^i, близкой к галилеевой. Метрика пространства событий будет иметь вид (123.2):

$$ds^2 = -dx^{0^2} + dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2} + \gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j. \qquad (128.1)$$

При этом согласно (123.5)

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \gamma_{ij}. \qquad (128.2)$$

Мы будем считать, что величинами γ_{ij}, $\dfrac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k}$, $\dfrac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}$ *можно пренебрегать сравнительно с единицей; кроме того, мы считаем их малыми одного («первого») порядка, так что произведениями этих величин мы будем пренебрегать по сравнению с самими этими величинами.*

*) В качестве попытки в этом направлении см. книгу В. А. Фока, Теория пространства, времени и тяготения, 2-е изд., М., 1961.

Это значит, что мы будем полагать, например,

$$\frac{1}{2}+\gamma_{00}\approx\frac{1}{2},\quad \gamma_{00}+\gamma_{11}\gamma_{22}\approx\gamma_{00}\ \text{и т. п.}$$

Это будет *первое наше упрощающее предположение* *).

Коэффициенты связности Γ^k_{ij} вычисляются по формуле

$$\Gamma^k_{ij}=g^{kl}\Gamma_{l,\,ij},\tag{128.3}$$

где

$$\Gamma_{l,\,ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{li}}{\partial x^j}+\frac{\partial \gamma_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^l}\right).\tag{128.4}$$

Ясно, что $\Gamma_{l,\,ij}$ в силу наших предположений будут малыми 1-го порядка. Поэтому в (128.3) можно заменить g^{kl} через $\overset{\circ}{g}{}^{kl}$, откинув добавочные члены, которые в произведении с $\Gamma_{l,\,ij}$ дают малые величины 2-го порядка. Действительно, так как $g_{kl}=\overset{\circ}{g}_{kl}+\gamma_{kl}$, то отсюда легко следует, что g^{kl} отличается от $\overset{\circ}{g}{}^{kl}$ тоже на малые 1-го порядка. Итак, сохраняя в (128.3) лишь малые 1-го порядка, получаем

$$\Gamma^k_{ij}=\overset{\circ}{g}{}^{kl}\Gamma_{l,\,ij}=\pm\Gamma_{k,\,ij}\begin{pmatrix}k=1,\ 2,\ 3\\ k=0\end{pmatrix}.\tag{128.5}$$

Выпишем дифференциальные уравнения геодезических

$$\frac{d^2x^k}{d\sigma^2}+\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma}=0.$$

В силу (128.5) их можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x^0}{d\sigma^2}-\Gamma_{0,\,ij}\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma}=0,\\ \frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2}+\Gamma_{\alpha,\,ij}\frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma}=0.\end{aligned}\right\}\tag{128.6}$$

Греческие индексы будут пробегать у нас значения 1, 2, 3. При пространственно-временных измерениях с принятой точностью можно считать, что x^0, x^1, x^2, x^3 имеют смысл ct, x, y, z (см. сноску),

*) Не следует забывать, что равенства, верные с принятой степенью точности, вообще говоря, *нельзя почленно дифференцировать*; вследствие этого мы не возвращаемся к псевдоевклидову случаю, хотя (128.1) с принятой степенью точности имеет вид

$$ds^2\approx-dx^{0^2}+dx^{1^2}+dx^{2^2}+dx^{3^2}.$$

так что согласно (67. 11)

$$\left.\begin{aligned} &d\sigma = c\,dt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}, \\ &\frac{dx^0}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \qquad \frac{dx^1}{d\sigma} = \frac{1}{c}\,\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \\ &\frac{dx^2}{d\sigma} = \frac{1}{c}\,\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \qquad \frac{dx^3}{d\sigma} = \frac{1}{c}\,\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{128.7}$$

Мы будем предполагать, что скорости движения рассматриваемых в поле тяготения свободных частиц малы сравнительно со скоростью света. Более точно, *мы будем пренебрегать сравнительно с единицей квадратами (и произведениями) этих скоростей, отнесенных к скорости света:*

$$\frac{dx}{c\,dt}\,\frac{dy}{c\,dt} \ll 1, \quad \frac{u^2}{c^2} \ll 1 \quad \text{и т. п.}$$

В этом будет состоять наше второе (и последнее) упрощающее предположение. Теперь формулы (128. 7) принимают вид

$$d\sigma \approx c\,dt, \quad \frac{dx^0}{d\sigma} \approx 1, \quad \frac{dx^1}{d\sigma} \approx \frac{1}{c}\,\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dx^2}{d\sigma} \approx \frac{1}{c}\,\frac{dy}{dt}, \quad \frac{dx^3}{d\sigma} \approx \frac{1}{c}\,\frac{dz}{dt}. \tag{128.8}$$

Имея в виду перейти в дифференциальных уравнениях (128. 6) от аргумента σ к аргументу x^0, подсчитаем $\frac{d^2x^\alpha}{dx^{0^2}}$ по известной формуле замены аргумента:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dx^{0^2}} = \frac{\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2}\,\frac{dx^0}{d\sigma} - \frac{d^2x^0}{d\sigma^2}\,\frac{dx^\alpha}{d\sigma}}{\left(\frac{dx^0}{d\sigma}\right)^3} = \frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2} - \frac{d^2x^0}{d\sigma^2}\,\frac{dx^\alpha}{d\sigma}.$$

С принятой нами степенью точности мы положили $\frac{dx^0}{d\sigma} \approx 1$ согласно (128. 8). Вставляя в полученное выражение вторые производные из (128. 6), мы приходим к формуле

$$\frac{d^2x^\alpha}{dx^{0^2}} = -\Gamma_{\alpha,ij}\frac{dx^i}{d\sigma}\,\frac{dx^j}{d\sigma} - \Gamma_{0,ij}\frac{dx^i}{d\sigma}\,\frac{dx^j}{d\sigma}\,\frac{dx^\alpha}{d\sigma}.$$

Так как произведениями скоростей, отнесенных к скорости света, мы сравнительно с единицей пренебрегаем, то в первом члене правой части исчезают слагаемые с произведениями $\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\,\frac{dx^\beta}{d\sigma}\left(\approx \frac{1}{c^2}\,\frac{dx^\alpha}{dt}\,\frac{dx^\beta}{dt}\right)$ и сохраняются лишь слагаемые, где $i=j=0$ или $i=0$, $j=\beta$, или $i=\beta$, $j=0$. Во втором же члене мы по тем же причинам сохраняем лишь одно слагаемое, где $i=j=0$. Итак,

$$\frac{d^2x^\alpha}{dx^{0^2}}=-\Gamma_{\alpha,00}\frac{dx^0}{d\sigma}\frac{dx^0}{d\sigma}-2\Gamma_{\alpha,\beta 0}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\frac{dx^0}{d\sigma}-\Gamma_{0,00}\frac{dx^0}{d\sigma}\frac{dx^0}{d\sigma}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\,.$$

Пользуясь (128. 8), (128. 4), получаем окончательно:

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}=-\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\gamma_{\alpha0}}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^\alpha}\right)-\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial t}+\frac{\partial\gamma_{\alpha0}}{\partial x^\beta}-\frac{\partial\gamma_{\beta0}}{\partial x^\alpha}\right)\frac{1}{c}\frac{dx^\beta}{dt}-$$

$$-\frac{1}{2c^2}\frac{\gamma_{00}}{\partial t}\frac{dx^\alpha}{dt}\,,$$

или

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}=-c\frac{\partial\gamma_{\alpha0}}{\partial t}+\frac{c^2}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{dx^\beta}{dt}+$$

$$+c\left(\frac{\partial\gamma_{\beta0}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial\gamma_{\alpha0}}{\partial x^\beta}\right)\frac{dx^\beta}{dt}-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial t}\frac{dx^\alpha}{dt}\,. \qquad (128.9)$$

Таким образом, свободная частица в поле тяготения получает ускорение, проекции которого на координатные оси выражаются согласно (128. 9). Это ускорение зависит, как мы видим, от местоположения частицы и от момента времени (так как γ_{ij} суть функции x^0, x^1, x^2, x^3), а также от ее скорости. Действительно, в правую часть формулы входят $\frac{dx^\beta}{dt}$ — проекции скорости частицы на координатные оси.

Формула (128. 9) в явном виде показывает нам, как поле тяготения, наблюдаемое с точки зрения данной координатной системы x^i, выражается через γ_{ij}, т. е. через отклонение метрического тензора от галилеевой формы $\overset{\circ}{g}_{ij}$.

Запишем теперь в нашей приближенной теории основную гипотезу (125. 4):

$$-\varkappa T_{ij}=R_{ij}-\frac{1}{2}Rg_{ij}. \qquad (128.10)$$

Заметим прежде всего, что это соотношение можно переписать в виде

$$R_{ij}=-\varkappa\left(T_{ij}-\frac{1}{2}Tg_{ij}\right), \qquad (128.11)$$

где

$$T=g^{ij}T_{ij}. \qquad (128.12)$$

В самом деле, свертывая (128.10) с g^{ij}, мы получаем:

$$-\varkappa T = R - \frac{1}{2} R g_{ij} g^{ij} = -R, \tag{128.13}$$

так как в четырехмерном пространстве

$$g_{ij} g^{ij} = \delta_i^i = 4.$$

Вставляя в (128.10) $\varkappa T$ вместо R, мы немедленно получаем (128.11). Столь же легко и обратно из (128.11) получить (128.10).

Теперь подсчитаем R_{ij}. Согласно (110.4) мы получаем (пренебрегая с принятой нами степенью точности произведениями Γ):

$$R_{ij,kl} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \gamma_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} + \frac{\partial^2 \gamma_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 \gamma_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial x^j \partial x^l}\right).$$

Далее, свертывая почленно с g^{il}, мы (по тем же соображениям) можем положить $g^{il} \approx \overset{\circ}{g}{}^{il}$, так что

$$R_{jk} \approx R_{ij,kl} \overset{\circ}{g}{}^{il} = \frac{1}{2}\left(\Box \gamma_{jk} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 \gamma_j^l}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 \gamma_k^l}{\partial x^j \partial x^l}\right), \tag{128.14}$$

где

$$\Box = -\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{3^2}}, \quad \gamma = \gamma_{il} \overset{\circ}{g}{}^{il}, \quad \gamma_j^l = \gamma_{ji} \overset{\circ}{g}{}^{il}. \tag{128.15}$$

Общая схема исследования будет иметь такой вид. *Задаемся тензором* T_{ij}, *т. е. распределением и движением масс. Тем самым нам будет известна правая часть соотношения* (128.11) (*с принятой нами точностью* g_{ij} *заменяем через* $\overset{\circ}{g}_{ij}$). *В левую часть вместо* R_{ij} *вставляем его выражение* (128.14) *и получаем систему* 10 *дифференциальных уравнений 2-го порядка с* 10 *неизвестными функциями* $\gamma_{ij}(x^0, x^1, x^2, x^3)$. *При некоторых дополнительных предположениях эти функции могут быть однозначно определены, а вместе с ними согласно* (128.9) *определится и поле тяготения.* Однако осуществление этой программы в общем виде довольно сложно и требует некоторой специализации координатной системы x^i. Поэтому *мы ограничимся стационарным случаем, т. е. предположим, что в пространстве событий можно выбрать такую координатную систему, с точки зрения которой массы, порождающие поле тяготения, практически находятся в покое. Тензор энергии-импульса имеет тем самым лишь одну координату, отличную от нуля, именно:*

$$T_{00} = \mu c^2, \tag{128.16}$$

где μ — плотность масс*). Плотность же импульса и его потока практически равна нулю, что связано с обращением в нуль остальных координат T_{ij}. Конечно, при этом из закона сохранения энергии-импульса следует, что плотность μ не меняется с течением времени и зависит лишь от точки

$$\mu = \mu(x^1, x^2, x^3). \tag{128.17}$$

Естественно считать, что при стационарном распределении масс порождаемое ими поле тяготения также является стационарным. Чтобы обеспечить это, *мы предположим, что стационарной является метрика пространства событий, т. е.* γ_{ij} от времени не зависят:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(x^1, x^2, x^3). \tag{128.18}$$

В таком случае в формуле (128.14) оператор $\Box$ можно заменить оператором Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{3^2}},$$

так как дифференцирование по x^0 все равно дает нуль.

Далее, пользуясь обращением в нуль всех T_{ij} кроме $T_{00} = \mu c^2$, мы подсчитываем:

$$T = g^{ij} T_{ij} = g^{00} T_{00} = -\mu c^2.$$

С принятой нами степенью точности мы заменили здесь: $g^{00} \approx \approx \overset{\circ}{g}{}^{00} = -1$. Теперь, очевидно,

$$T_{ij} - \frac{1}{2} T g_{ij} \approx \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ \frac{1}{2}\mu c^2 & (i = j). \end{cases} \tag{128.19}$$

Используя теперь (128.11) при $i = \alpha$ $(= 1, 2, 3)$, $j = 0$, получаем:

$$R_{\alpha 0} = 0,$$

или согласно (128.14)

$$\Delta \gamma_{\alpha 0} - \frac{\partial^2 \gamma_0^l}{\partial x^\alpha \partial x^l} = 0.$$

Члены, где имеется дифференцирование по x^0, мы отбросили. Дифференцируя по x^β почленно и альтернируя по α, β, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \Delta \gamma_{\alpha 0} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Delta \gamma_{\beta 0} = 0,$$

*) Мы знаем, что $T^{00} = \mu c^2$. Но $T_{00} = g_{0i} g_{0j} T^{ij} \approx \overset{\circ}{g}_{0i} \overset{\circ}{g}_{0j} T^{ij} = \overset{\circ}{g}_{00} \overset{\circ}{g}_{00} T^{00} = T^{00} = \mu c^2$.

т. е.

$$\Delta\left(\frac{\partial\gamma_{\alpha 0}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial\gamma_{\beta 0}}{\partial x^{\alpha}}\right)=0. \qquad (128.20)$$

Мы будем считать, что массы, порождающие поле тяготения, расположены в некоторой ограниченной области пространства. В таком случае естественно предположить, что γ_{ij} вместе со своими частными производными стремятся к нулю в бесконечности, что обеспечивает нам исчезновение поля тяготения в бесконечности. Искажение евклидовой метрики, вызванное присутствием масс, ослабевает по мере удаления от них, и в очень удаленных областях координаты x^i являются практически галилеевыми. Это допущение вполне оправдано с точки зрения приложений. Так, например, поле тяготения солнечной системы практически исчезает в удаленных областях пространства (однако не столь удаленных, чтобы начало сказываться поле тяготения ближайших звезд). В идеализированном виде, отвлекаясь от поля тяготения звезд, мы можем рассматривать, следовательно, поле тяготения, исчезающее в бесконечности.

Считая, что γ_{ij}, $\dfrac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x^k}$ при $r\to\infty$ стремятся к нулю ($r=\sqrt{x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}}$), можно утверждать, что уравнение Лапласа (128.20) допускает лишь нулевое решение, и мы получаем:

$$\frac{\partial\gamma_{\alpha 0}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial\gamma_{\beta 0}}{\partial x^{\alpha}}=0. \qquad (128.21)$$

Используем теперь (128.11), (128.19) при $i=j=0$. Получаем: $R_{00}=-\frac{\varkappa}{2}\mu c^2$, откуда, сравнивая с (128.14) при $j=k=0$, имеем

$$\frac{1}{2}\Delta\gamma_{00}=-\frac{\varkappa}{2}\mu c^2$$

(все дифференцирования по x^0 дают нуль). Полученное здесь уравнение Пуассона для γ_{00} имеет, как известно, решение

$$\gamma_{00}(x^1,\ x^2,\ x^3)=\frac{\varkappa c^2}{4\pi}\iiint\frac{\mu(y^1,\ y^2,\ y^3)}{\rho}\,dy^1\,dy^2\,dy^3, \qquad (128.22)$$

где $\rho=\sqrt{(x^1-y^1)^2+(x^2-y^2)^2+(x^3-y^3)^2}$, а интеграл распространен по области распределения масс. При наших предположениях ($\gamma_{00}\to 0$ при $r\to\infty$) это решение будет единственным. Рассмотрим теперь поле тяготения, отвечающее данному распределению масс. Прежде всего перепишем формулу (128.9) для стационарного случая вообще (когда γ_{ij} не зависят от t). Получим:

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{dt^2}=\frac{c^2}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^{\alpha}}+c\left(\frac{\partial\gamma_{\beta 0}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial\gamma_{\alpha 0}}{\partial x^{\beta}}\right)\frac{dx^{\beta}}{dt}. \qquad (128.23)$$

Пользуясь (128.21) и (128.22), получаем окончательно:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}=\frac{\varkappa c^4}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\iiint\frac{\mu(y^1,\ y^2,\ y^3)}{\rho}\,dy^1\,dy^2\,dy^3. \qquad (128.24)$$

Остальных γ_{ij}, не играющих роли для поля тяготения, мы вычислять не будем.

Мы замечаем, что ускорение частицы в поле тяготения будет в точности таким же, как и в ньютоновой теории, если выбрать константу $\varkappa$ (до сих пор не определенную) из условия $\frac{\varkappa c^4}{8\pi}=k$, т. е. положить:

$$\varkappa=\frac{8\pi k}{c^4}, \qquad (128.25)$$

где k — *ньютонова гравитационная константа*. В таком случае

$$\frac{\varkappa c^4}{8\pi}\iiint\frac{\mu(y^1,\ y^2,\ y^3)}{\rho}\,dy^1\,dy^2\,dy^3=k\iiint\frac{\mu(y^1,\ y^2,\ y^3)}{\rho}\,dy^1\,dy^2\,dy^3$$

дает *ньютонов гравитационный потенциал*, и (128.24) есть основная формула ньютоновой теории тяготения.

Итак, общая теория относительности в рассмотренном нами первом приближении приводит к ньютоновой теории тяготения. Теперь мы отказываемся от приближенной точки зрения и переходим к точной теории, которая приводит уже к несколько иным результатам. Однако фактически проинтегрировать уравнения (125.4), т. е. найти метрический тензор g_{ij} по тензору энергии-импульса T_{ij}, удается лишь в исключительных случаях (в левых частях уравнений (125.4) мы должны представлять себе R_{ij} выраженными через g_{ij}, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$, $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k\,\partial x^l}$, так что у нас будет 10 уравнений с частными производными 2-го порядка относительно 10 функций $g_{ij}\,(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$).

В дальнейшем мы будем заниматься лишь одним, правда, очень важным случаем, когда поле тяготения создается массами, сосредоточенными в малой области, так что поле тяготения за пределами этой области естественно считать центрально симметрическим. Очевидно, сюда относятся поля тяготения, создаваемые отдельными небесными телами.

§ 129. Центрально симметрическое поле тяготения

Мы предположим, что в пространстве событий можно выбрать такую координатную систему y^i (как всегда у нас, близкую к галилеевой), что соблюдаются следующие условия.