Пользуясь (128.21) и (128.22), получаем окончательно:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}=\frac{\varkappa c^4}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\iiint\frac{\mu(y^1,\ y^2,\ y^3)}{\rho}\,dy^1\,dy^2\,dy^3. \qquad (128.24)$$

Остальных γ_{ij}, не играющих роли для поля тяготения, мы вычислять не будем.

Мы замечаем, что ускорение частицы в поле тяготения будет в точности таким же, как и в ньютоновой теории, если выбрать константу $\varkappa$ (до сих пор не определенную) из условия $\frac{\varkappa c^4}{8\pi}=k$, т. е. положить:

$$\varkappa=\frac{8\pi k}{c^4}, \qquad (128.25)$$

где k — *ньютонова гравитационная константа*. В таком случае

$$\frac{\varkappa c^4}{8\pi}\iiint\frac{\mu(y^1,\ y^2,\ y^3)}{\rho}\,dy^1\,dy^2\,dy^3=k\iiint\frac{\mu(y^1,\ y^2,\ y^3)}{\rho}\,dy^1\,dy^2\,dy^3$$

дает *ньютонов гравитационный потенциал*, и (128.24) есть основная формула ньютоновой теории тяготения.

Итак, общая теория относительности в рассмотренном нами первом приближении приводит к ньютоновой теории тяготения. Теперь мы отказываемся от приближенной точки зрения и переходим к точной теории, которая приводит уже к несколько иным результатам. Однако фактически проинтегрировать уравнения (125.4), т. е. найти метрический тензор g_{ij} по тензору энергии-импульса T_{ij}, удается лишь в исключительных случаях (в левых частях уравнений (125.4) мы должны представлять себе R_{ij} выраженными через g_{ij}, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$, $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k\,\partial x^l}$, так что у нас будет 10 уравнений с частными производными 2-го порядка относительно 10 функций $g_{ij}\,(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$).

В дальнейшем мы будем заниматься лишь одним, правда, очень важным случаем, когда поле тяготения создается массами, сосредоточенными в малой области, так что поле тяготения за пределами этой области естественно считать центрально симметрическим. Очевидно, сюда относятся поля тяготения, создаваемые отдельными небесными телами.

§ 129. Центрально симметрическое поле тяготения

Мы предположим, что в пространстве событий можно выбрать такую координатную систему y^i (как всегда у нас, близкую к галилеевой), что соблюдаются следующие условия.

1°. Метрическая квадратичная форма $ds^2 = \tilde{g}_{ij}\,dy^i\,dy^j$ будет инвариантной относительно всевозможных ортогональных преобразований над координатами y^1, y^2, y^3 при неизменной y^0.

2°. Координаты метрического тензора $\tilde{g}_{ij}$ не зависят от времени, т. е. от y^0:

$$\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}_{ij}(y^1,\ y^2,\ y^3),$$

так что поле тяготения стационарное. При этих двух условиях поле тяготения мы будем называть *центрально симметрическим*.

Гиперповерхности $y^0 = \mathrm{const}$ мы для наглядности будем рассматривать как обычные евклидовы пространства, отнесенные к прямоугольным декартовым координатам y^1, y^2, y^3. Соответствующая евклидова метрика будет играть у нас вспомогательную роль и с «настоящей» метрикой гиперповерхности не совпадает. Введем вместо «прямоугольных декартовых» координат y^1, y^2, y^3 «полярные» координаты x^1, x^2, x^3, где x^1 — полярный радиус:

$$x^1 = r = \sqrt{{y^1}^2 + {y^2}^2 + {y^3}^2},$$

$x^2 = \frac{\pi}{2} - \theta$, где θ — широта, $x^3 = \varphi$, где φ — долгота. При этом r, θ, φ определены обычным образом относительно вспомогательной евклидовой метрики, так что

$$y^1 = x^1 \sin x^2 \cos x^3,\quad y^2 = x^1 \sin x^2 \sin x^3,\quad y^3 = x^1 \cos x^2.$$

Положив еще $x^0 = y^0$, мы переходим в пространстве событий к координатам x^0, x^1, x^2, x^3.

Квадратичная форма

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$$

согласно условию 1° должна оставаться инвариантной, когда в каждой гиперповерхности $x^0 = \mathrm{const}$ производится одно и то же (произвольное) «вращение» около начала O. В дальнейшем под вращениями мы понимаем «вращения» именно этого рода.

Пусть $M\ (x_M^0,\ x_M^1,\ x_M^2,\ x_M^3)$ — произвольная точка одной из этих гиперповерхностей; в каждой из гиперповерхностей $x^0 = \mathrm{const}$ ей отвечает точка $M'\ (x_M^{0'},\ x_M^1,\ x_M^2,\ x_M^3)$ с теми же значениями x^1, x^2, x^3. Производим вращение вокруг прямой OM в этой гиперповерхности *и одновременно такие же вращения вокруг соответствующих прямых $O'M'$ в каждой гиперповерхности* $x^0 = \mathrm{const}$.

Рассмотрим в точке M двумерные направления $dx^0 = dx^1 = 0$ и $dx^2 = dx^3 = 0$. Первое из этих направлений, очевидно, касается двумерной сферы $x^0 = x_M^0$, $x^1 = x_M^1$, описанной в гиперповерхности

$x^0 = x^0_M$ из начала O как из центра и проходящей через M. При вращении вокруг OM эта сфера скользит по себе и первое двумерное направление вращается в себе самом. Второе двумерное направление касается двумерной поверхности $x^2 = x^2_M$, $x^3 = x^3_M$ — геометрического места осей вращения $O'M'$ (взятых по одной в каждой гиперповерхности $x^0 = \text{const}$). В процессе вращения это двумерное направление тем самым остается неизменным; более того, все принадлежащие ему векторы остаются неподвижными. Последнее видно из того, что в процессе вращения x^0, x^1, а значит, и dx^0, dx^1 не меняют своих значений.

Каждый неподвижный вектор второго двумерного направления в процессе вращения сохраняет постоянный угол (точнее, постоянное скалярное произведение) с вращающимся вектором первого двумерного направления. Но это возможно лишь в случае ортогональности неподвижного вектора ко второму двумерному направлению. В результате оба двумерных направления будут взаимно ортогональны, что равносильно тому, что в метрическом тензоре

$$g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = 0 \text{ *)}. \qquad (129.1)$$

Тем самым метрическая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = g_{00}\, dx^{0^2} + 2g_{01}\, dx^0\, dx^1 + g_{11}\, dx^{1^2} + \\ + g_{22}\, dx^{2^2} + 2g_{23}\, dx^2\, dx^3 + g_{33}\, dx^{3^2}. \qquad (129.2)$$

В частности, на двумерной сфере $x^0 = \text{const}$, $x^1 = \text{const}$:

$$ds^2 = g_{22} dx^{2^2} + 2g_{23} dx^2 dx^3 + g_{33} dx^{3^2}. \qquad (129.3)$$

При всевозможных вращениях сферы эта квадратичная форма должна оставаться инвариантной. Но инвариантной остается при этом и форма

$$dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}, \qquad (129.4)$$

совпадающая с первой квадратичной формой на единичной сфере обычного пространства $\left(\text{напомним: } x^2 = \frac{\pi}{2} - \theta,\ x^3 = \varphi\right)$. Отношение форм (129.3) и (129.4), которое мы обозначим k, зависит лишь от линейного элемента на сфере $\left(x^2,\ x^3, \frac{dx^3}{dx^2}\right)$. Но так как обе формы инвариантны при вращениях сферы, а вращения способны переводить любой линейный элемент сферы в любой, то k представляет собой

*) Так, например, $g_{02} = 0$ означает ортогональность бесконечно малого вектора $dx^0 = dx^1 = dx^3 = 0$, $dx^2 \neq 0$ в первом двумерном направлении к вектору $dx^0 \neq 0$, $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ — во втором двумерном направлении.

для данной сферы константу. В результате

$$ds^2 = k\,(dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}), \tag{129.5}$$

где k может зависеть лишь от x^0, x^1. Но так как по нашему предположению g_{ij} от x^0 не зависят, то

$$k = k\,(x^1). \tag{129.6}$$

Теперь в (129.2) последние три слагаемые имеют вид (129.5), и их сумма при вращениях остается, очѐвидно, инвариантной (равно как и вся форма (129.2)). Тем самым сумма и первых трех слагаемых остается инвариантной, а так как, кроме того, dx^0, dx^1 инвариантны по отдельности, то коэффициенты g_{00}, g_{01}, g_{11} также должны оставаться инвариантными *). Тем самым они не могут зависеть от x^2, x^3, а значит, зависят только от x^1. Мы получаем:

$$ds^2 = g_{00}(x^1)\,dx^{0^2} + 2g_{01}(x^1)\,dx^0 dx^1 + g_{11}(x^1)\,dx^{1^2} + \\ + k\,(x^1)\,(dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}). \tag{129.7}$$

Мы можем упростить это выражение, изменив начальный момент отсчета времени в разных точках пространства по-разному, а именно, первые три члена можно переписать в виде

$$g_{00}\left[dx^0 + \frac{g_{01}}{g_{00}}\,dx^1\right]^2 + \left(g_{11} - \frac{g_{01}^2}{g_{00}}\right) dx^{1^2}.$$

Положим:

$$x^{0'} = x^0 + \int \frac{g_{01}(x^1)}{g_{00}(x^1)}\,dx^1.$$

В таком случае (обозначая $x^{0'}$ снова через x^0) мы можем переписать (129.7) в виде

$$ds^2 = g_{00}dx^{0^2} + \left(g_{11} - \frac{g_{01}^2}{g_{00}}\right) dx^{1^2} + k\,(x^1)\,(dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}). \tag{129.8}$$

Если бы мы имели дело с пространством специальной теории относительности, то у нас было бы

$$ds^2 = -dx^{0^2} + dx^{1^2} + x^{1^2}(dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}). \tag{129.9}$$

Действительно, то, что добавляется к $-dx^{0^2}$, представляет собой метрическую квадратичную форму обычного пространства в полярных координатах.

По нашим общим предположениям коэффициенты формы (129.8) лишь немного отличаются от коэффициентов формы (129.9).

*) Учитывая, что сумма первых трех слагаемых остается инвариантной при *произвольных* dx^0, dx^1.

В частности, функция $k(x^1)$ близка к x^{1^2}. Можно добиться и их полного совпадения, если ввести вместо x^1 новую координату

$$x^{1'} = \sqrt{k(x^1)}.$$

Мы не нарушаем при этом никаких предположений, сделанных в начале этого параграфа. Теперь (129.8) примет вид

$$ds^2 = l(x^1)\,dx^{0^2} + h(x^1)\,dx^{1^2} + x^{1^2}(dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}),$$

где $x^{1'}$ обозначено просто через x^1, а $l(x^1)$ и $h(x^1)$ — некоторые его функции (явным выражением которых мы не интересуемся). При этом $l(x^1)$ близко к -1, а $h(x^1)$ — к 1, так что мы будем писать их в виде

$$l(x^1) = -e^{\nu(x^1)}, \quad h(x^1) = e^{\lambda(x^1)},$$

где $\nu(x^1)$, $\lambda(x^1)$ близки к нулю. Итак,

$$ds^2 = -e^{\nu}dx^{0^2} + e^{\lambda}dx^{1^2} + x^{1^2}(dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}). \qquad (129.10)$$

Отсюда

$$g_{00} = -e^{\nu}, \quad g_{11} = e^{\lambda}, \quad g_{22} = x^{1^2}, \quad g_{33} = x^{1^2}\sin^2 x^2,$$

остальные $g_{ij} = 0$.

$$g^{00} = -e^{-\nu}, \quad g^{11} = e^{-\lambda}, \quad g^{22} = \frac{1}{x^{1^2}}, \quad g^{33} = \frac{1}{x^{1^2}\sin^2 x^2}.$$

Подсчитывая Γ_{ij}^k по обычным формулам, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda'}{2}, \quad \Gamma_{10}^0 = \frac{\nu'}{2}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin x^2 \cos x^2,\\
&\Gamma_{22}^1 = -x^1 e^{-\lambda}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{x^1},\\
&\Gamma_{23}^3 = \operatorname{ctg} x^2, \quad \Gamma_{33}^1 = -x^1 \sin^2 x^2 e^{-\lambda};
\end{aligned}\right\} \qquad (129.11)$$

остальные $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Теперь, пользуясь формулой (105.8):

$$R_{lk,\,i\cdot}^{\cdot\cdot\,q} = \frac{\partial \Gamma_{li}^q}{\partial x^k} + \Gamma_{kp}^q \Gamma_{li}^p - \frac{\partial \Gamma_{ki}^q}{\partial x^l} - \Gamma_{lp}^q \Gamma_{ki}^p$$

и производя свертывание по индексам l, q, находим тензор Риччи:

$$R_{ki} = R_{qk,\,i}^{\cdot\cdot\,q} = \frac{\partial \Gamma_{qi}^q}{\partial x^k} + \Gamma_{kp}^q \Gamma_{qi}^p - \frac{\partial \Gamma_{ki}^q}{\partial x^q} - \Gamma_{qp}^q \Gamma_{ki}^p.$$

Так как тензор Риччи R_{ki} вместе с метрическим тензором должен быть инвариантен при рассматриваемых нами вращениях, то совершенно аналогично предыдущему (формулы (129.1)) получаем:

$$R_{02} = R_{03} = R_{12} = R_{13} = 0, \tag{129.12}$$

а также убеждаемся, что квадратичная форма

$$R_{22}dx^{2^2} + 2R_{23}dx^2dx^3 + R_{33}dx^{3^2}$$

должна иметь вид

$$dx^{2^2} + \sin^2 x^2 dx^{3^2}$$

с точностью до скалярного множителя. Это значит, что

$$R_{33} = R_{22}\sin^2 x^2, \quad R_{23} = 0. \tag{129.13}$$

Пользуясь (129.11), подсчитаем теперь отличные от нуля координаты тензора R_{ij}. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} R_{00} &= e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{x^1}\right), \\ R_{11} &= \frac{\nu''}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\lambda'}{x^1}, \\ R_{22} &= -1 + e^{-\lambda}\left(1 - x^1\lambda' + \frac{\lambda'+\nu'}{2}x^1\right). \end{aligned}\right\} \tag{129.14}$$

Что же касается R_{01}, то подсчет показывает, что $R_{01} = 0$.

§ 130. Центрально симметрическое поле тяготения (окончание)

Мы предположим теперь, что тензор энергии-импульса T_{ij} отличен от нуля лишь в некоторой узкой «трубке», окружающей ось x^0, т. е. при условии $x^1 \leqslant r_0$, где r_0 — некоторая постоянная. За пределами же этой «трубки» T_{ij} равен нулю:

$$T_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad x^1 > r_0. \tag{130.1}$$

С точки зрения физической системы отсчета, в которой мы находимся, это значит, что массы, порождающие поле тяготения, расположены в сфере радиуса r_0 с центром в начале координат, за пределами же этой сферы отсутствуют. Внутри сферы распределение масс должно быть, конечно, центрально симметрическим (поскольку тензор T_{ij} обладает этим свойством). Получается картина, близкая к полю тяготения, порожденному одним небесным телом (Солнцем, звездой или планетой).

Это поле тяготения будет интересовать нас лишь за пределами самого небесного тела, т. е. при условии $x^1 > r_0$. В таком случае $T_{ij} = 0$, а это согласно (128.11) и (128.10) равносильно тому, что $R_{ij} = 0$. Чтобы удовлетворить этому требованию, мы должны при-