совершенно аналогично предыдущему (формулы (129.1)) получаем:

$$R_{02}=R_{03}=R_{12}=R_{13}=0, \tag{129.12}$$

а также убеждаемся, что квадратичная форма

$$R_{22}dx^{2^2}+2R_{23}dx^2dx^3+R_{33}dx^{3^2}$$

должна иметь вид

$$dx^{2^2}+\sin^2 x^2 dx^{3^2}$$

с точностью до скалярного множителя. Это значит, что

$$R_{33}=R_{22}\sin^2 x^2, \quad R_{23}=0. \tag{129.13}$$

Пользуясь (129.11), подсчитаем теперь отличные от нуля координаты тензора R_{ij}. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} R_{00}&=e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{\nu''}{2}+\frac{\lambda'\nu'}{4}-\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\nu'}{x^1}\right), \\ R_{11}&=\frac{\nu''}{4}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\lambda'\nu'}{4}-\frac{\lambda'}{x^1}, \\ R_{22}&=-1+e^{-\lambda}\left(1-x^1\lambda'+\frac{\lambda'+\nu'}{2}x^1\right). \end{aligned}\right\} \tag{129.14}$$

Что же касается R_{01}, то подсчет показывает, что $R_{01}=0$.

§ 130. Центрально симметрическое поле тяготения (окончание)

Мы предположим теперь, что тензор энергии-импульса T_{ij} отличен от нуля лишь в некоторой узкой «трубке», окружающей ось x^0, т. е. при условии $x^1 \leqslant r_0$, где r_0 — некоторая постоянная. За пределами же этой «трубки» T_{ij} равен нулю:

$$T_{ij}=0 \quad \text{при} \quad x^1>r_0. \tag{130.1}$$

С точки зрения физической системы отсчета, в которой мы находимся, это значит, что массы, порождающие поле тяготения, расположены в сфере радиуса r_0 с центром в начале координат, за пределами же этой сферы отсутствуют. Внутри сферы распределение масс должно быть, конечно, центрально симметрическим (поскольку тензор T_{ij} обладает этим свойством). Получается картина, близкая к полю тяготения, порожденному одним небесным телом (Солнцем, звездой или планетой).

Это поле тяготения будет интересовать нас лишь за пределами самого небесного тела, т. е. при условии $x^1>r_0$. В таком случае $T_{ij}=0$, а это согласно (128.11) и (128.10) равносильно тому, что $R_{ij}=0$. Чтобы удовлетворить этому требованию, мы должны приравнять нулю три выражения (129.14). Тогда R_{33} обратится в нуль в силу (129.13), а остальные R_{ij} и без того равны нулю. Мы приходим к дифференциальным уравнениям:

$$-\frac{\nu''}{2}+\frac{\lambda'\nu'}{4}-\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\nu'}{x^1}=0, \tag{130.2}$$

$$\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\lambda'\nu'}{4}-\frac{\lambda'}{x^1}=0, \tag{130.3}$$

$$-1+e^{-\lambda}\left(1-x^1\lambda'+\frac{\lambda'+\nu'}{2}x^1\right)=0. \tag{130.4}$$

Итак, для того, чтобы метрика (129.10)

$$ds^2=-e^{\nu(x^1)}dx^{0^2}+e^{\lambda(x^1)}dx^{1^2}+x^{1^2}(dx^{2^2}+\sin^2 x^2 dx^{3^2}) \tag{130.5}$$

удовлетворяла условию отсутствия масс, $T_{ij}=0$, *при* $x^1>r_0$, *необходимо и достаточно, чтобы функции* $\nu(x^1)$, $\lambda(x^1)$ *удовлетворяли (при* $x^1>r_0$*) выписанной выше системе дифференциальных уравнений.*

Эту систему нетрудно проинтегрировать. Складывая почленно первые два уравнения, мы приходим к соотношению

$$\nu'+\lambda'=0. \tag{130.6}$$

Третье уравнение дает теперь

$$-1+e^{-\lambda}(1-x^1\lambda')=0,$$

т. е.

$$-1+(x^1e^{-\lambda})'=0,$$

откуда

$$x^1e^{-\lambda}=x^1+a,$$

где a — некоторая константа. Окончательно

$$e^{-\lambda}=1+\frac{a}{x^1}, \quad e^{\lambda}=\frac{1}{1+\frac{a}{x^1}}. \tag{130.7}$$

Из (130.6) следует, что ν от $-\lambda$ отличается лишь постоянным слагаемым, а следовательно, e^{ν} от $e^{-\lambda}$ лишь постоянным множителем:

$$e^{\nu}=Ce^{-\lambda}=C\left(1+\frac{a}{x^1}\right)\cdot \tag{130.8}$$

Множитель C близок к единице, поскольку близки к единице величины e^{ν} и e^{λ}. Вставляя (130.7), (130.8) в (130.5), мы относим множитель C к dx^{0^2} и принимаем для простоты $\sqrt{C}x^0$ за новую координату x^0. Тогда (130.5) принимает вид

$$ds^2 = -\left(1+\frac{a}{x^1}\right)dx^{0^2} + \frac{dx^{1^2}}{1+\frac{a}{x^1}} + x^{1^2}\left(dx^{2^2} + \sin^2 x^2\, dx^{3^2}\right). \qquad (130.9)$$

Такой вид имеет метрика в случае центрального симметрического поля тяготения в области $x^1 > r_0$, *свободной от гравитирующих масс.* Теперь окончательно

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 + \frac{a}{x^1}, \qquad \nu = -\lambda. \qquad (130.10)$$

Из уравнений (130.2), (130.3) мы использовали лишь их следствие (130.6), однако найденные нами функции $\nu(x^1)$, $\lambda(x^1)$ удовлетворяют этим уравнениям, как показывает непосредственная проверка.

Константа a зависит от той суммарной массы m, которая сосредоточена в окрестности начала (в области $x^1 \leqslant r_0$) и порождает рассматриваемое поле тяготения. Зависимость между a и m можно найти из следующих соображений. Рассмотрим метрику (130.9) при очень больших x^1. Тогда коэффициенты при dx^{0^2}, dx^{1^2} очень мало отличаются соответственно от -1, 1 и метрика почти не отличается от псевдоевклидовой. В таком случае мы имеем право применять выводы приближенной теории § 128 для стационарного случая, в частности, формулу (128.23). Для этого нужно было бы вернуться от наших координат x^1, x^2, x^3 (приблизительно полярных) к координатам y^1, y^2, y^3 (приблизительно прямоугольным декартовым). У нас, как видно из (130.9), $g_{\alpha 0} = 0$. Это равенство сохраняется, очевидно, при любом преобразовании «пространственных» координат x^1, x^2, x^3 между собой, в частности, при возвращении к (приблизительно) прямоугольным декартовым координатам y^1, y^2, y^3. Поэтому в этих последних $\gamma_{\alpha 0} = g_{\alpha 0} = 0$, и формула (128.23) принимает вид

$$\frac{d^2 y^\alpha}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\frac{\gamma_{00}c^2}{2}.$$

Таким образом, поле тяготения обладает потенциальной функцией $\frac{\gamma_{00}c^2}{2}$.

Мы знаем, что $g_{00} = -1 + \gamma_{00}$, причем в нашем случае $g_{00} = -\left(1+\frac{a}{r}\right)$ (так как в (130.9) x^1 играет (приблизительно) роль полярного расстояния r). Следовательно, $\gamma_{00} = -\frac{a}{r}$ и

$$\frac{\gamma_{00}c^2}{2} = -\frac{ac^2}{2r}. \qquad (130.11)$$

Но согласно приближенной теории мы должны получить ньютонову потенциальную функцию, равную $\frac{km}{r}$, где k — гравитационная константа. Сравнивая с (130.11), получаем:

$$a = -\frac{2km}{c^2}.$$

Теперь (130.9) принимает окончательный вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2km}{c^2 x^1}\right) dx^{0^2} + \frac{dx^{1^2}}{1 - \frac{2km}{c^2 x^1}} + x^{1^2} (dx^{2^2} + \sin^2 x^2 \, dx^{3^2}); \quad (130.12)$$

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2km}{c^2 x^1}. \quad (130.13)$$

Напомним, что при этом предполагается, что $x^1 > r_0$; r_0 нужно считать не слишком малым, так, чтобы $\frac{2km}{c^2 r_0}$ было мало сравнительно с единицей и, следовательно, чтобы метрика (130.12) мало отличалась от псевдоевклидовой.

При выводе формулы (130.12) мы предполагали, что кроме массы m, сосредоточенной вблизи начала координат, других гравитирующих масс нет. Поэтому, применяя формулу (130.12), например, к полю тяготения, порождаемому Солнцем (и пренебрегая полем тяготения планет), мы можем ею пользоваться лишь до тех пор, пока не начнет сказываться поле тяготения звезд. Следовательно, формулу (130.12) имеет смысл применять хотя и при очень больших полярных радиусах x^1 (сравнимых с расстоянием до ближайшей звезды), но не при $x^1 \to \infty$. И вообще, как указывалось, мы не предъявляем никаких претензий на установление геометрических свойств всего пространства событий. Экспериментальный материал, которым в настоящее время обладает наука, не дает еще возможности сделать какие-либо обоснованные выводы в этом отношении.

В противоположность этой точке зрения многие авторы пытались построить геометрию четырехмерного пространства событий в целом. Лишенные экспериментальной базы, эти попытки представляют собой лишь фантазии, хотя и облеченные в математическую форму.

§ 131. Геодезические линии в случае центрально симметрического поля тяготения

Чтобы изучить движение свободной частицы в центрально симметрическом поле тяготения, нужно найти геодезические линии метрики (130.12). При этом геодезические линии дают, как мы знаем, четырехмерные траектории: в случае мнимой длины — для частиц с