Но согласно приближенной теории мы должны получить ньютонову потенциальную функцию, равную $\frac{km}{r}$, где k — гравитационная константа. Сравнивая с (130.11), получаем:

$$a = -\frac{2km}{c^2}.$$

Теперь (130.9) принимает окончательный вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2km}{c^2 x^1}\right) dx^{0^2} + \frac{dx^{1^2}}{1 - \frac{2km}{c^2 x^1}} + x^{1^2}\left(dx^{2^2} + \sin^2 x^2 \, dx^{3^2}\right); \quad (130.12)$$

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2km}{c^2 x^1}. \quad (130.13)$$

Напомним, что при этом предполагается, что $x^1 > r_0$; r_0 нужно считать не слишком малым, так, чтобы $\frac{2km}{c^2 r_0}$ было мало сравнительно с единицей и, следовательно, чтобы метрика (130.12) мало отличалась от псевдоевклидовой.

При выводе формулы (130.12) мы предполагали, что кроме массы m, сосредоточенной вблизи начала координат, других гравитирующих масс нет. Поэтому, применяя формулу (130.12), например, к полю тяготения, порождаемому Солнцем (и пренебрегая полем тяготения планет), мы можем ею пользоваться лишь до тех пор, пока не начнет сказываться поле тяготения звезд. Следовательно, формулу (130.12) имеет смысл применять хотя и при очень больших полярных радиусах x^1 (сравнимых с расстоянием до ближайшей звезды), но не при $x^1 \to \infty$. И вообще, как указывалось, мы не предъявляем никаких претензий на установление геометрических свойств всего пространства событий. Экспериментальный материал, которым в настоящее время обладает наука, не дает еще возможности сделать какие-либо обоснованные выводы в этом отношении.

В противоположность этой точке зрения многие авторы пытались построить геометрию четырехмерного пространства событий в целом. Лишенные экспериментальной базы, эти попытки представляют собой лишь фантазии, хотя и облеченные в математическую форму.

§ 131. Геодезические линии в случае центрально симметрического поля тяготения

Чтобы изучить движение свободной частицы в центрально симметрическом поле тяготения, нужно найти геодезические линии метрики (130.12). При этом геодезические линии дают, как мы знаем, четырехмерные траектории: в случае мнимой длины — для частиц с ненулевой массой покоя, а в случае ненулевой длины — для световых лучей.

Пусть геодезическая линия задана начальной точкой и направлением в ней. В четырехмерном пространстве событий всегда можно найти трехмерную «плоскость», уравнение которой имеет вид

$$A_1 y^1 + A_2 y^2 + A_3 y^3 = 0 \tag{131.1}$$

(так что «плоскость» проходит через ось y^0) и которая проходит через данную точку и данное направление (здесь y^i имеют тот же смысл, как и в начале § 129). Так как координаты y^1, y^2, y^3 задаются с точностью до ортогонального преобразования, то всегда можно добиться, чтобы уравнение «плоскости» имело простой вид

$$y^3 = 0.$$

Геодезическая, для которой начальная точка и начальное направление лежат в этой плоскости, и сама в ней лежит. В самом деле, при зеркальном отражении в пространстве событий, когда

$$y^0 \to y^0, \quad y^1 \to y^1, \quad y^2 \to y^2, \quad y^3 \to -y^3,$$

метрика (130.12) в силу ее симметрического характера остается инвариантной и ее геодезические переходят снова в геодезические. При этом плоскость $y^3 = 0$ и лежащие в ней точки с направлением переходят в себя, следовательно, переходят в себя и определяемые ими геодезические. Но это при нашем зеркальном отражении возможно лишь в том случае, если эти геодезические целиком лежат в плоскости $y^3 = 0$.

Итак, геодезические линии метрики (130.12) *располагаются в трехмерных «плоскостях» вида* (131.1).

Все эти плоскости равноценны в том смысле, что любую из них можно перевести в любую ортогональным преобразованием над y^1, y^2, y^3, причем метрика (130.12) сохраняется и геодезические переходят в геодезические. Поэтому достаточно изучить геодезические в какой-нибудь одной из этих «плоскостей». Мы рассмотрим «плоскость» $y^3 = 0$, которая в «полярных» координатах определится, очевидно, уравнением

$$x^2 = \frac{\pi}{2} \quad (\text{т. е. широта } \theta = 0). \tag{131.2}$$

На «плоскости» остаются в качестве координат x^0, x^1, x^3, и метрика принимает вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2km}{c^2 x^1}\right) dx^{0^2} + \frac{dx^{1^2}}{1 - \frac{2km}{c^2 x^1}} + x^{1^2} dx^{3^2}. \tag{131.3}$$

Составим дифференциальные уравнения геодезических, лежащих в этой «плоскости». Геодезические, отнесенные к каноническому параметру τ, вообще определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2}+\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}=0. \tag{131.4}$$

В нашем случае Γ^k_{ij} имеют вид (129.11), причем в силу $x^2=\frac{\pi}{2}$ обращаются в нуль Γ^2_{33} и Γ^3_{23}. Остальные отличные от нуля Γ^k_{ij} мы перепишем, учитывая, что (согласно (130.10)) $\nu=-\lambda$, а также $\sin x^2=1$:

$$\Gamma^1_{11}=\frac{\lambda'}{2},\quad \Gamma^0_{10}=-\frac{\lambda'}{2},\quad \Gamma^1_{22}=-x^1e^{-\lambda},\quad \Gamma^1_{00}=-\frac{\lambda'}{2}e^{-2\lambda},$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=\frac{1}{x^1},\quad \Gamma^1_{33}=-x^1e^{-\lambda}.\quad \text{Остальные } \Gamma^k_{ij}=0.$$

Выпишем теперь уравнения (131.4) при $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$, причем будем помнить, что $x^2=\frac{\pi}{2}$, а следовательно, $\frac{dx^2}{d\tau}=\frac{d^2x^2}{d\tau^2}=0$. Получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x^0}{d\tau^2}-\lambda'\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau}&=0,\\ \frac{d^2x^1}{d\tau^2}-\frac{\lambda'}{2}e^{-2\lambda}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2+\frac{\lambda'}{2}\left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)^2-x^1e^{-\lambda}\left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^2&=0,\\ 0&=0,\\ \frac{d^2x^3}{d\tau^2}+\frac{2}{x^1}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{131.5}$$

Умножая почленно первое из этих уравнений на $e^{-\lambda(x^1)}$, а последнее на x^{1^2}, мы приводим их к виду

$$\frac{d}{d\tau}\left(e^{-\lambda}\frac{dx^0}{d\tau}\right)=0,\quad \frac{d}{d\tau}\left(x^{1^2}\frac{dx^3}{d\tau}\right)=0,$$

откуда

$$e^{-\lambda}\frac{dx^0}{d\tau}=a,\quad x^{1^2}\frac{dx^3}{d\tau}=b, \tag{131.6}$$

где a, b — некоторые константы (для данной геодезической); мы будем считать $b\neq 0$, оставляя в стороне тривиальный случай радиального движения частицы. Кроме того, касательный вектор $\frac{dx^i}{d\tau}$ (при каноническом параметре τ) параллельно переносится вдоль геодезической, так что сохраняет постоянную длину. Обозначим его постоянный скалярный квадрат через C. Так как у нас согласно (129.10), (130.13)

$$g_{00}=-e^{\nu}=-e^{-\lambda},\quad g_{11}=e^{\lambda},\quad g_{22}=x^{1^2},\quad g_{33}=x^{1^2}\sin^2 x^2=x^{1^2}$$

(остальные g_{ij} равны нулю), то скалярный квадрат вектора $\frac{dx^i}{d\tau}$ $\left(\text{принимая во внимание, что } x^2=\frac{\pi}{2},\ \frac{dx^2}{d\tau}=0\right)$ можно записать в виде

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2+e^{\lambda}\left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)^2+x^{1^2}\left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^2=C. \qquad (131.7)$$

Соотношения (131.6) вместе с (131.7) дают нам все, что нужно (неиспользованное второе уравнение (131.5) является их следствием). Мы хотим исключить из них τ и x^0, чтобы получить дифференциальное уравнение между x^1, x^3. Исключив x^0, т. е. время, мы переходим к рассмотрению траектории частицы (или светового луча) в обычном чисто пространственном смысле в координатах x^1, x^2, x^3. Так как при этом x^1, x^2, x^3 играют роль полярных координат в пространстве, то x^1, x^3 играют роль полярных координат ($x^1=r$, $x^3=\varphi$) на рассматриваемой нами «экваториальной» плоскости $x^2=\frac{\pi}{2}$ (широта $\theta=0$). Зависимость между x^1, x^3 определяет в этой плоскости траекторию частицы (или светового луча) в обычном смысле слова.

Конечно, x^1, x^3 лишь приблизительно играют роль обычных полярных координат, так как метрика рассматриваемой плоскости лишь приблизительно является евклидовой.

Действительно, полагая в (131.3) $x^0=\text{const}$, $x^1=r$, $x^3=\varphi$, получаем:

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-\frac{2km}{c^2r}}+r^2\,d\varphi^2.$$

Возвращаемся к выкладке. Заменяя в (131.7) $\frac{dx^0}{d\tau}$ через ae^{λ} и $\frac{dx^3}{d\tau}$ через $\frac{b}{x^{1^2}}$ (согласно (131.6)), получим:

$$-a^2e^{\lambda}+e^{\lambda}\left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)^2+\frac{b^2}{x^{1^2}}=C, \text{ т. е. } \left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)^2=a^2+e^{-\lambda}\left(C-\frac{b^2}{x^{1^2}}\right).$$

Деля почленно это уравнение на второе из равенств (131.6), возведенное в квадрат, получим окончательно:

$$\left(\frac{1}{x^{1^2}}\frac{dx^1}{dx^3}\right)^2=\frac{1}{b^2}\left\{a^2+e^{-\lambda}\left(C-\frac{b^2}{x^{1^2}}\right)\right\}.$$

Это и есть дифференциальное уравнение искомой траектории в полярных координатах x^1, $x^3=r$, φ в плоскости $x^2=\frac{\pi}{2}$.

Переходя к обозначениям r, φ и полагая

$$\frac{a^2}{b^2}=A, \quad \frac{C}{b^2}=B, \qquad (131.8)$$

получим:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = A + e^{-\lambda}\left(B - \frac{1}{r^2}\right). \tag{131.9}$$

Для выкладок будет удобнее пользоваться обратной величиной полярного радиуса. Мы положим:

$$\sigma = \frac{1}{r}.$$

Тогда, согласно (130.13)

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2km}{c^2 r} = 1 - \frac{2km}{c^2}\sigma, \tag{131.10}$$

и (131.9) принимает вид

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = A + \left(1 - \frac{2km}{c^2}\sigma\right)(B - \sigma^2). \tag{131.11}$$

В это дифференциальное уравнение, связывающее φ, σ, входят две произвольные константы A и B. При этом, как видно из (131.8), $A \geqslant 0$, $B \leqslant 0$. Действительно, скалярный квадрат C вектора $\frac{dx^i}{d\sigma}$ будет отрицательным в случае траектории частицы (с ненулевой массой покоя) и равным нулю в случае траектории светового луча.

Отсюда $B < 0$ в первом случае и $B = 0$ во втором случае.

Мы предпочтем заменить дифференциальное уравнение 1-го порядка (131.11) эквивалентным ему дифференциальным уравнением 2-порядка, исключив при этом одну из произвольных постоянных. Для этого мы просто почленно продифференцируем уравнение по φ; аддитивная константа A исчезнет. Получаем:

$$2\frac{d\sigma}{d\varphi}\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = -\frac{2km}{c^2}\frac{d\sigma}{d\varphi}(B - \sigma^2) + \left(1 - \frac{2km}{c^2}\sigma\right)\left(-2\sigma\frac{d\sigma}{d\varphi}\right). \tag{131.12}$$

При обратном интегрировании константа A появляется снова. При этом, если учесть, что $B \leqslant 0$, то из самого вида уравнения (131.11) следует, что $A \geqslant 0$.

Итак, дифференциальные уравнения (131.11), (131.12) действительно эквивалентны. Деля (131.12) на $2\frac{d\sigma}{d\varphi}$ почленно, получаем:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = -\frac{kmB}{c^2} - \sigma + \frac{3km}{c^2}\sigma^2. \tag{131.13}$$

Все случаи $\sigma = \text{const}$, которые мы как будто потеряли, сокращая на $\frac{d\sigma}{d\varphi}$, мы полностью находим среди решений уравнения (131.13), подбирая B так, чтобы правая часть была равна 0 (при $\sigma = \text{const}$). Поэтому вопрос полностью сводится к интегрированию уравнения (131.13).