Это можно понимать в том смысле, что за время обхода планетой своей орбиты сама орбита успевает повернуться в том же направлении на угол

$$\varepsilon = \frac{2\pi\alpha}{p}. \tag{132.8}$$

Этот угол (весьма малый для планет солнечной системы) составляет наиболее заметную величину для Меркурия; его значение, предсказываемое теорией относительности, хорошо согласуется с опытом. Заметим еще, что, прибавляя $\sigma_1(\varphi)$ к $\sigma_0(\varphi)$, мы откинули периодическую часть $\sigma_1(\varphi)$, но ввиду малости $\sigma_1(\varphi)$ сравнительно с $\sigma_0(\varphi)$ это дает при подсчете угла ε весьма малую относительную ошибку, которой мы пренебрегаем.

§ 133. Искривление световых лучей в поле тяготения

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение (131.13) в случае $B = 0$, когда оно определяет, как мы знаем, траектории световых лучей:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = -\sigma + \alpha\sigma^2, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{3km}{c^2}. \tag{133.1}$$

В порядке первого приближения мы отбрасываем член $\alpha\sigma^2$ и интегрируем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = -\sigma.$$

Получаем:

$$\sigma_0(\varphi) = L\cos\varphi + M\sin\varphi, \tag{133.2}$$

где L и M — произвольные постоянные. За счет поворота полярной оси нетрудно добиться, чтобы решение имело вид $\sigma_0(\varphi) = L\cos\varphi$, $L > 0$, или, полагая $R = \frac{1}{L}$,

$$\sigma_0(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{R}. \tag{133.3}$$

Так как $\sigma = \frac{1}{r}$, то соответствующее полярное уравнение траектории будет:

$$r = \frac{1}{\sigma_0(\varphi)} = \frac{R}{\cos\varphi}.$$

Мы получаем «прямую», проходящую на расстоянии R от начала координат. Точнее, полученная траектория была бы прямой, если бы r, φ были полярными координатами на обычной евклидовой плоскости.

Итак, в первом приближении световой луч распространяется «прямолинейно».

Переходя ко второму приближению, ищем решение дифференциального уравнения (133.1) в виде

$$\sigma(\varphi)=\sigma_0(\varphi)+\sigma_1(\varphi).$$

Вставляя это приближение в уравнение (133.1), получаем:

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}=-\sigma_1+\alpha(\sigma_0+\sigma_1)^2.$$

Как и в § 132, считаем добавку σ_1 малой сравнительно с σ_0 — главной частью решения, так что пишем полученное дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}=-\sigma_1+\alpha\sigma_0^2,$$

т. е.

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}=-\sigma_1+\frac{\alpha\cos^2\varphi}{R^2}.$$

Решение этого уравнения будет:

$$\sigma_1=\frac{\alpha}{3R^2}(1+\sin^2\varphi). \tag{133.4}$$

Правда, мы выписали здесь лишь частное решение; но члены вида $A\cos\varphi+B\sin\varphi$ (A, B — произвольные постоянные), которые нужно присоединить сюда, чтобы получить общее решение, мы объединяем с $\sigma_0=\frac{1}{R}\cos\varphi$. При добавлении к σ_0 этих членов решение сохраняет вид (133.2), траектория остается «прямолинейной» и испытывает лишь весьма малое смещение и поворот (ввиду малости добавляемых членов). Искривление светового луча в поле тяготения, которое сейчас нас интересует, происходит, следовательно, лишь при добавлении частного решения (133.4). Поэтому мы этим частным решением и ограничимся*). Итак,

$$\sigma=\sigma_0+\sigma_1=\frac{\cos\varphi}{R}+\frac{\alpha}{3R^2}(1+\sin^2\varphi). \tag{133.5}$$

В случае $\sigma=\frac{\cos\varphi}{R}$ мы имеем прямую линию, причем когда мы пробегаем ее, полярный угол φ меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, так что полярный радиус поворачивается на угол π. Значения $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ дают $\sigma=0$, т. е. $r=\infty$, и определяют направления, параллельные нашей прямой. Переходя к траектории (133.5), мы вносим в уравнение

*) Несколько более детальный подсчет показал бы, что мы делаем при этом весьма малую относительную ошибку в окончательном результате.

дополнительный член $\frac{\alpha}{3R^2}(1+\sin^2\varphi)$, вызывающий ее искривление (весьма малое ввиду малости этого члена). Теперь, когда полярный угол φ достигает значения $\frac{\pi}{2}$, σ еще остается положительным (хотя и будет очень малым), так что кривая еще не уходит в бесконечность. Это происходит при дальнейшем (весьма малом) увеличении угла φ, когда $\frac{\cos\varphi}{R}$ принимает отрицательное значение, уничтожающееся в сумме с добавочным членом. Пусть $\frac{\pi}{2}+\delta$ (где δ весьма мало) будет значение φ, при котором $\sigma=0$, $r=\infty$, и кривая уходит в бесконечность. Подставим в (133.5) $\varphi=\frac{\pi}{2}+\delta$, причем в добавочном члене мы полагаем $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)=1-\frac{\delta^2}{2}+\ldots\approx 1$, пренебрегая весьма малой величиной δ^2 сравнительно с единицей. Получаем:

$$0=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)}{R}+\frac{2\alpha}{3R^2}\approx-\frac{\delta}{R}+\frac{2\alpha}{3R^2}.$$

Отсюда

$$\delta\approx\frac{2\alpha}{3R}. \qquad (133.6)$$

Итак, при $\varphi\to\frac{\pi}{2}+\delta$ и, в силу симметрии относительно полярной оси, при $\varphi\to-\frac{\pi}{2}-\delta$ кривая уходит в бесконечность. Нетрудно показать, что при этом кривая имеет асимптоты: проекция $\frac{\cos(\varphi-\delta)}{\sigma}$ полярного радиуса r на полярную ось, повернутую на угол δ, при $\varphi\to\frac{\pi}{2}+\delta$ стремится к конечному пределу (что легко получается по правилу Лопиталя). Тем самым имеется одна асимптота, идущая под углом $\frac{\pi}{2}+\delta$ к полярной оси и, конечно, вторая, симметричная с первой. Таким образом, наш световой луч приходит из бесконечности, имея первоначальное (предельное) направление под углом $\frac{\pi}{2}-\delta$ к полярной оси, и уходит в бесконечность под углом $\frac{\pi}{2}+\delta$ (разумеется, практически имеется в виду луч, идущий из одной достаточно удаленной точки в другую, тоже достаточно удаленную). *Уклонение луча от первоначального направления составляет, таким образом, угол*

$$2\delta\approx\frac{4\alpha}{3R}=\frac{4km}{c^2R}. \qquad (133.7)$$

Когда идущие от звезд лучи проходят вблизи Солнца, т. е. в сильном центрально симметрическом поле тяготения, действительно наблюдается отклонение лучей от первоначального направления, достаточно хорошо согласующееся с полученной формулой (такие наблюдения возможны при солнечных затмениях).

§ 134. Красное смещение спектральных линий. Заключение

Есть еще третий случай, когда отклонения от ньютоновой теории, предсказываемые теорией относительности, доступны опытной проверке, несмотря на свою малую величину.

Пусть в центрально симметрическом поле тяготения (130.12) из некоторой точки M_1 с полярным радиусом $x^1=r_1$ и в момент времени x_1^0 подается световой сигнал, который принимается затем в точке M_2 с полярным радиусом $x^1=r_2$ и в момент времени x_2^0. При этом мы будем считать, что r_1 сравнительно мало, так что точка M_1 находится вблизи гравитирующей массы m, а r_2, наоборот, очень велико, так что в точке M_2 наше поле тяготения фактически не ощущается. Ввиду стационарного характера поля ясно, что, если повторить сигнал спустя некоторое время, он будет распространяться в точности таким же образом, как и в первый раз. Если второй сигнал был отправлен после первого спустя время Δx^0, то он и принят будет после первого спустя время Δx^0.

Теперь необходимо обратить внимание на то, что x^0, как мы знаем, лишь приблизительно играет роль времени ct, поскольку мы находимся в координатах, лишь близких к галилеевым, но не галилеевых (x^0 — «среднее» или «мировое» время). Координата x^0 практически будет совпадать с временем ct, если мы перейдем *в локально галилеевы координаты*, что можно сделать лишь по отдельности в окрестности точки M_1 и в окрестности точки M_2. Пусть $\tilde{x}^0$ — локально галилеева координата в окрестности точки M_1. В таком случае dx^{0^2} должно входить в ds^2 с коэффициентом — 1, а для этого мы должны положить, как видно из (130.12): $d\tilde{x}^0 = dx^0 \sqrt{1-\frac{2km}{c^2r_1}} \approx dx^0\left(1-\frac{km}{c^2r_1}\right)$, откуда следует аналогичное соотношение и для приращений: $\Delta\tilde{x}^0 \approx \Delta x^0\left(1-\frac{km}{c^2r_1}\right)$. Обозначая через t_1 время в локально галилеевых координатах в окрестности M_1, так что $\tilde{x}^0=ct_1$, мы получаем, следовательно, $c\Delta t_1 = \Delta x^0\left(1-\frac{km}{c^2r_1}\right)$. Аналогичную формулу мы пишем и для времени t_2 в окрестности M_2 с заменой r_1 на r_2; но ввиду того, что r_2 очень велико, мы получаем: $c\Delta t_2=\Delta x^0$. Отсюда следует: $\Delta t_2 \approx \frac{\Delta t_1}{1-\frac{km}{c^2r_1}} \approx \Delta t_1\left(1+\frac{km}{c^2r_1}\right)$,