РАЗДЕЛ 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

ГЛАВА 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§1. Необходимые определения и обозначения

Отрезок прямой определяется двумя равноправными точками — его концами. Отрезок с концами A и B обозначают $[AB]$ или $[BA]$. Если A и B — различные точки (обозначение: $A \neq B$), то отрезок $[AB]$ единственным образом определяет прямую (AB). В этом случае, говоря об отрезке $[AB]$ как о множестве точек, считают, что это множество состоит из точек A и B и тех и только тех точек C, которые лежат на прямой (AB) между точками A и B. Если $A = B$, то отрезок $[AA]$ состоит из единственной точки A.

Если выбрана единица измерения, то каждому отрезку $[AB]$ можно сопоставить неотрицательное действительное число $|AB|$, которое называется его *длиной*. Условимся считать, что единица измерения длин выбрана, и, говоря о длинах отрезков, не будем указывать, в каких именно единицах они выражаются. Длина отрезка $[AB]$ называется также *расстоянием между точками A и B*.

Приведем свойства расстояния.

1°. $|AB| = |BA|$.

2°. $|AB| > 0$, *если* $A \neq B$, и $|AB| = 0$, *если* $A = B$.

3°. *Точка C лежит на отрезке $[AB]$ тогда и только тогда, когда* $|AC| + |CB| = |AB|$ (рис. 1.1).

Рис. 1.1

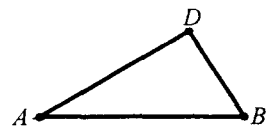

Рис. 1.2

4°. *Для любой точки D, не лежащей на отрезке $[AB]$, выполняется неравенство* $|AD| + |DB| > |AB|$, *называемое неравенством треугольника* (рис. 1.2).

Пусть $A \neq B$. Точка C отрезка $[AB]$, отличная от его концов, называется *внутренней точкой* этого отрезка. Ее положение на отрезке $[AB]$ однозначно определяется длиной отрезка $[AC]$ или отношением $\lambda = |AC| : |CB|$, которое называется *отношением, в котором точка C делит отрезок $[AB]$, считая от точки A*. Если $\lambda = 1$, т.е. $|AC| = |CB|$, то точка C называется *серединой отрезка* $[AB]$. Серединой отрезка $[AA]$ называется точка A. Если O — фиксированная точка, то отображение Z_O, при котором каждой точке A ставится в соответствие такая точка $B = Z_O(A)$, что O — середина отрезка $[AB]$, называется *центральной симметрией относительно точки O*. Точка O называется *центром симметрии*. Точки A и $Z_O(A)$ называются *симметричными относительно точки O*.

Любая лежащая на прямой l точка A разбивает эту прямую на два *луча* l_+ и l_- с началом в точке A. Эти лучи называются *дополнительными* друг к другу (обозначение: $l_+ = \bar{l}_-$, $l_- = \bar{l}_+$). Точка A принадлежит каждому из лучей l_+ и l_-. Две точки $B \neq A$ и $C \neq A$ прямой l принадлежат одному и тому же лучу с началом в точке $A \in l$ тогда и только тогда, когда отрезок $[BC]$ не содержит точки A, и принадлежат дополнительным лучам, когда точка A является внутренней точкой этого отрезка. Луч с началом в точке A, на котором лежит точка $B \neq A$, обозначают $[AB)$ (рис. 1.3).

Рис. 1.3

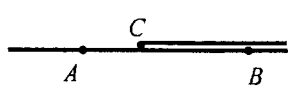

Рис. 1.4

Два луча, лежащие на одной прямой, называются *сонаправленными*, если их пересечение есть луч, и *противоположно направленными*, если их пересечение не является лучом. Например, на рис. 1.4 лучи $[AB)$ и $[CB)$ сонаправлены, а лучи $[BA)$ и $[CB)$ противоположно направлены.

Всякая прямая l, лежащая в плоскости $\mathcal{P}$, разбивает эту плоскость на две *полуплоскости* $\mathcal{P}_+$ и $\mathcal{P}_-$, про которые говорят, что они *определяются прямой l*. Прямая l принадлежит каждой их этих полуплоскостей. Две точки $B \notin l$ и $C \notin l$ плоскости $\mathcal{P}$ лежат в одной полуплоскости, опреде-

ляемой прямой $l \subset \mathcal{P}$, тогда и только тогда, когда отрезок $[BC]$ не имеет с прямой l общих точек.

Два луча $[AB)$ и $[CD)$, лежащие на параллельных несовпадающих прямых, принадлежат некоторой плоскости $\mathcal{P}$. Лучи $[AB)$ и $[CD)$ называются *сонаправленными* (обозначение: $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$), если они лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой $(AC) \subset \mathcal{P}$ (рис. 1.5), и *противоположно направленными* (обозначение: $[AB) \uparrow\downarrow [CD)$), если они лежат в разных полуплоскостях (рис. 1.6). Очевидно, что если $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$, то $[\overline{AB}) \uparrow\downarrow [CD)$.

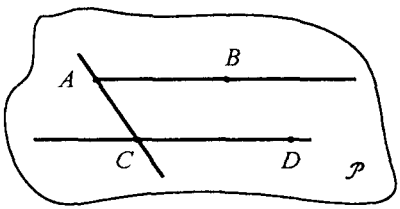

Рис. 1.5

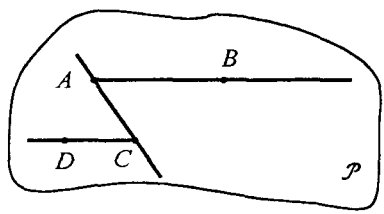

Рис. 1.6

Два луча $[AB)$ и $[CD)$ противоположно направлены тогда и только тогда, когда существует такая точка O, что $[CD) = Z_O([AB))$. Важным свойством сонаправленности лучей является транзитивность этого отношения: *два луча, порознь сонаправленные третьему, сонаправлены друг другу.*

Пусть $\mathcal{P}$ — некоторая плоскость, O, A, B — три ее различные точки, не лежащие на одной прямой. Точка B расположена в одной из двух полуплоскостей, на которые прямая (OA) разбивает плоскость $\mathcal{P}$. Обозначим эту полуплоскость $\mathcal{P}_+$. Аналогично, точка A расположена в некоторой полуплоскости $\mathcal{P}_-$, определяемой в плоскости $\mathcal{P}$ прямой (OB). *Выпуклым углом* $\angle AOB$ *между лучами* $[OA)$ *и* $[OB)$ называется пересечение множеств $\mathcal{P}_+$ и $\mathcal{P}_-$ (рис. 1.7). Величина выпуклого угла $\angle AOB$ называется *углом между лучами* $[OA)$ *и* $[OB)$ (обозначение $\widehat{AOB}$). Эта величина может выражаться как в градусах, так и в радианах. При этом в радианной мере $0 < \widehat{AOB} < \pi$, а в градусной мере $0° < \widehat{AOB} < 180°$. Пусть лучи $l_1 = [OA)$ и $l_2 = [CD)$ не лежат на параллельных прямых. Из точки O

выходит единственный луч $[OB)$, сонаправленный лучу l_2. *Углом между лучами* l_1 и l_2 называется угол $\widehat{AOB}$ (рис. 1.8).

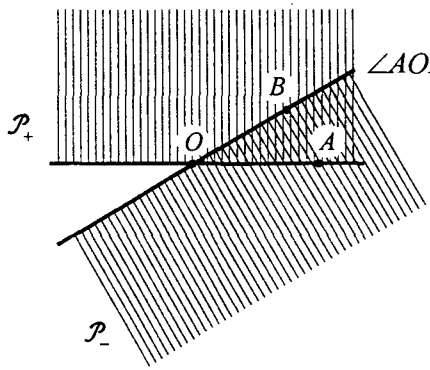

Рис. 1.7

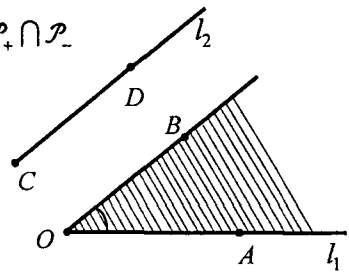

Рис. 1.8

По определению угол между сонаправленными лучами равен $0°$, угол между противоположно направленными лучами — $180°$.

§2. Преобразование подобия. Перемещение

Преобразование p пространства (плоскости) называется *преобразованием подобия*, если существует такое число $k > 0$, что для любых двух точек A и B пространства (плоскости) выполнено равенство

$$k|AB| = |p(A)p(B)|.$$

Число k называется *коэффициентом подобия*.

Свойства преобразования подобия приведены в Дополнении.

Пусть O — фиксированная точка, $k \neq 0$ — заданное действительное число. *Гомотетией* H_O^k *с центром* O *и коэффициентом* k называется преобразование пространства (плоскости), при котором образом каждой точки A пространства (плоскости) является точка B, удовлетворяющая следующим требованиям:

а) точки A, O, B лежат на одной прямой;

б) $|OB| = |k| \cdot |OA|$;

в) если $A \neq O$, то $B \in [OA)$ при $k > 0$ и $B \in [\overline{OA})$ при $k < 0$.

Свойства гомотетии приведены в Дополнении.

Преобразование подобия с коэффициентом $k = 1$ называется *перемещением* (*ортогональным преобразованием*).