§3. Направленный отрезок. Параллельный перенос

Направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$ называется упорядоченная пара точек A и B. Точка A называется *началом* направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, точка B — его *концом*. На рисунках направленный отрезок изображают стрелкой, идущей из его начала в его конец (рис. 1.9).

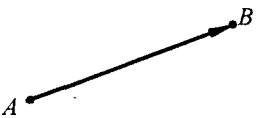


Рис. 1.9

Направленный отрезок $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* направленному отрезку $\overrightarrow{AB}$ (обозначение: $-\overrightarrow{AB}$). Если точки A и B различны, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *ненулевым*; если точки A и B совпадают, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, точнее $\overrightarrow{AA}$, называется *нулевым* (обозначение: $\overrightarrow{\theta}_A$). *Длиной* $|\overrightarrow{AB}|$ направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется величина $|AB|$.

Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *параллельным прямой* l (*плоскости* $\mathcal{P}$), если либо он нулевой, либо прямая (AB) параллельна прямой l (плоскости $\mathcal{P}$). Ненулевой направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *перпендикулярным прямой* l (*плоскости* $\mathcal{P}$), если прямая (AB) перпендикулярна прямой l (плоскости $\mathcal{P}$). Направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}, \dots, \overrightarrow{A_nB_n}$ называются *коллинеарными*, если существует прямая l, которой параллелен каждый из этих отрезков. Для обозначения параллельности (коллинеарности) используют символ $\|$, а для обозначения перпендикулярности — символ $\perp$. Направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}, \dots, \overrightarrow{A_nB_n}$ называются *компланарными*, если существует плоскость $\mathcal{P}$, которой параллелен каждый из этих отрезков. Если направленные отрезки коллинеарны, то они компланарны. Если направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ перпендикулярны одной плоскости $\mathcal{P}$, то они коллинеарны: $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$.

Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *сонаправленными* (обозначение: $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$), если либо один из них нулевой, либо $[AB)\uparrow\uparrow[CD)$, т.е. если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и лучи $[AB)$ и $[CD)$ сонаправлены. Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *противоположно направленными* (обозначение: $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$), если либо один из них нулевой, либо $[AB)\uparrow\downarrow[CD)$.

Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ называются *равными*, если середины отрезков $[A_1B]$ и $[AB_1]$ совпадают (обозначение: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$). Из данного определения следует, что

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}. \qquad (1.1)$$

Очевидно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ тогда и только тогда, когда $-\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A_1B_1}$. Используя понятие центральной симметрии, можно сказать, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ тогда и только тогда, когда существует такая точка O (общая середина отрезков $[A_1B]$ и $[AB_1]$), что $A_1 = Z_O(B)$, $B_1 = Z_O(A)$ (рис. 1.10 и 1.11).

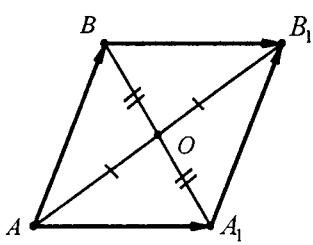


Рис. 1.10

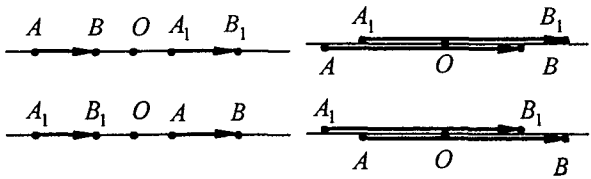
Из свойств параллелограмма следует, что направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$, не лежащие на одной прямой, равны тогда и только тогда, когда четырехугольник ABB_1A_1 — параллелограмм (рис. 1.10). Для равных направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$, лежащих на одной прямой, возможно одно из четырех расположений, изображенных на рис. 1.11, а, б.

Итак, равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ имеет место тогда и только тогда, когда:

а) направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ коллинеарны;

б) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1B_1}$;

в) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A_1B_1}|$.



а) $[AB] \cap [A_1B_1] = \varnothing$ б) $[AB] \cap [A_1B_1] \neq \varnothing$

Рис. 1.11

Как следует из определения, нулевой направленный отрезок равен любому другому нулевому направленному отрезку и только нулевому. Всякий направленный отрезок равен самому себе. Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. Из транзитивности отношений параллельности прямых, сонаправленности лучей, равенства действительных чисел следует, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$. Таким образом, отношение равенства направленных отрезков обладает свойством транзитивности. Это отношение является *отношением эквивалентности*. Оно разбивает множество направленных отрезков на классы эквивалентности. Каждый класс эквивалентности характеризуется тем, что ему принадлежат все попарно равные направленные отрезки и только они.

Для любого направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ и любой точки C существует одна и только одна точка D такая, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (точка D симметрична точке A относительно середины отрезка $[BC]$). Тот факт, что найдена точка D такая, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, выражают следующей фразой: от точки C *отложен* направленный отрезок $\overrightarrow{CD}$, равный $\overrightarrow{AB}$. Точку D называют образом точки C при *параллельном переносе на направленный отрезок* $\overrightarrow{AB}$ (обозначение: $D = T_{\overrightarrow{AB}}(C)$).

Свойства параллельного переноса приведены в Дополнении.