## §4. Сложение направленных отрезков. Композиция параллельных переносов

*Суммой* $\vec{AB}+\vec{CD}$ направленных отрезков $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ называется направленный отрезок $\vec{AF}$, где $F = T_{\vec{CD}}(B)$ (рис. 1.12). Операция нахождения суммы называется *сложением* направленных отрезков. Сформулируем законы сложения направленных отрезков в виде следующих утверждений.

I. $\vec{AB}+\vec{\theta}_C = \vec{AB}$; $\vec{AB}+\vec{BA} = \vec{AB}+(-\vec{AB}) = \vec{\theta}_A = \vec{\theta}_C$.

II. *Если* $\vec{C_1D_1} = \vec{CD}$, *то* $\vec{AB}+\vec{C_1D_1} = \vec{AB}+\vec{CD}$.

III. Коммутативность сложения. *Для любых направленных отрезков* $\vec{AB}$ *и* $\vec{CD}$ *выполнено равенство* $\vec{AB}+\vec{CD} = \vec{CD}+\vec{AB}$.

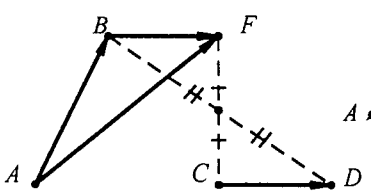



Рис. 1.12

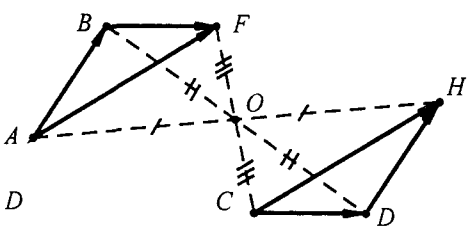



Рис. 1.13

□ Пусть $F$ и $H$ — такие точки, что $\vec{BF} = \vec{CD}$, $\vec{DH} = \vec{AB}$ (рис. 1.13). Это означает, что середины отрезков $[BD]$ и $[CF]$ совпадают. Также совпадают середины отрезков $[BD]$ и $[AH]$. Следовательно, совпадают и середины отрезков $[CF]$ и $[AH]$, т.е. $\vec{AF} = \vec{CH}$. Но, по определению, $\vec{AF}$ есть $\vec{AB}+\vec{CD}$, а $\vec{CH}$ является суммой $\vec{CD}+\vec{AB}$. ■

Если точки $A$ и $C$ совпадают, то совпадают и точки $F$ и $H$ (направленные отрезки $\vec{AF}$ и $\vec{CH}$ равны, у них общее начало, а значит, и общий конец). Если точки $A = C, B$, $F = H, D$ не лежат на одной прямой, то четырехугольник $ABFD$ — параллелограмм. Таким образом, справедливо правило параллелограмма (рис. 1.14): сумма двух неколлинеар-

ных направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, имеющих общее начало $A$, есть направленный отрезок $\overrightarrow{AF}$, где $[AF]$ — диагональ параллелограмма $ABFD$, построенного на отрезках $[AB]$ и $[AD]$ как на сторонах.

Замечание. Если $A \neq C$, то в соответствии с определением суммы направленные отрезки $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$ имеют разные начала (соответственно $A$ и $C$). Отрезки $[AF]$ и $[CH]$ различны, тем не менее направленные отрезки $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{CH}$ равны.

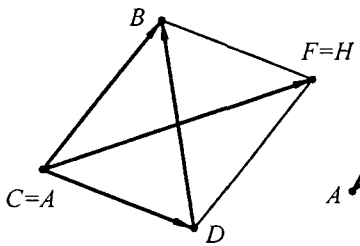



Рис. 1.14

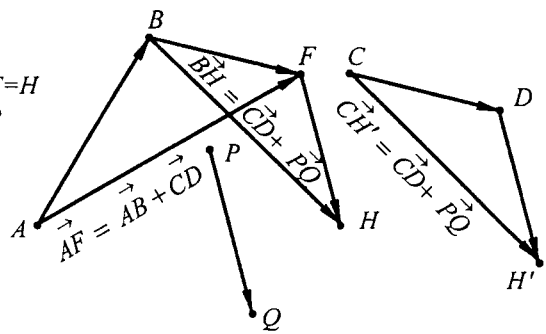



Рис. 1.15

IV. *Если* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C_1D_1}$, *то* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1}$.

V. Ассоциативность сложения. *Для любых направленных отрезков* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{PQ}$ *выполняется равенство*

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PQ}). \qquad (1.2)$$

□ Пусть $F = T_{\overrightarrow{CD}}(B)$, $H = T_{\overrightarrow{PQ}}(F)$ (рис. 1.15). По определению суммы, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{PQ}$. На основании утверждения IV $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PQ}$. Тогда, по определению суммы,

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PQ}).$$

Учитывая транзитивность равенства направленных отрезков, получаем отсюда равенство (1.2). ■

Замечание. Из утверждения V по индукции получаем, что результат сложения нескольких направленных отрезков не зависит от того, как в рассматриваемой сумме расставлены скобки. Поэтому сумму направленных отрезков

$$\overrightarrow{A_1B_1},\ \overrightarrow{A_2B_2},\ \ldots,\ \overrightarrow{A_nB_n}$$

обозначают так:

$$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\ \ldots\ +\overrightarrow{A_nB_n}.$$

В силу утверждения III в этой сумме не важен и порядок слагаемых.

Пусть $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ — конечный набор точек. Ломаную с последовательными вершинами в этих точках называют *путем*, идущим из точки $A_1$ в точку $A_n$. Для всякого пути справедливо правило замыкающей (рис. 1.16).

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ \ldots\ +\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}.$$

Замкнутая ломаная $A_1A_2\ldots A_nA_1$ называется *циклом*. Справедливо следующее правило цикла:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ \ldots\ +\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=\vec{\theta}_{A_1}. \qquad (1.3)$$

Для того чтобы указать, что к циклу $A_1A_2\ldots A_nA_1$ применяется правило цикла, на рисунке внутри цикла изображают стрелку (рис. 1.17).

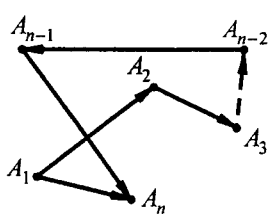



Рис. 1.16

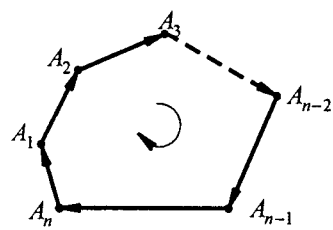



Рис. 1.17

Используя свойства 6° и 8° параллельного переноса (см. Дополнение), правило цикла можно записать на языке преобразований следующим образом: преобразование $T_{\overrightarrow{A_nA_1}}\circ T_{\overrightarrow{A_{n-1}A_n}}\circ\ \ldots\ \circ T_{\overrightarrow{A_2A_3}}\circ T_{\overrightarrow{A_1A_2}}$ является тождественным преобразованием.

*Разностью* $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$. Операция нахождения разности называется *вычитанием*. Вычитание — операция, обратная по

отношению к сложению в следующем смысле. Если направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$ таковы, что $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$. Иначе говоря, направленный отрезок можно переносить из одной части равенства в другую с противоположным знаком.

□ Действительно, если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CD}$, то, прибавляя к обеим частям этого равенства направленный отрезок $\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{CD}$, получаем

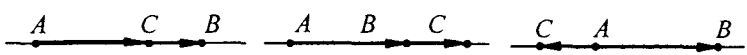
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{\theta}_C=\overrightarrow{MN}$. ■

Если $ABFD$ — параллелограмм (см. рис. 1.14), то направленный отрезок $\overrightarrow{DB}$, где $[DB]$ — диагональ параллелограмма, равен разности $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$. Справедливо правило раскрытия скобок

$$(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{C_1D_1})+\ \dots\ +(\overrightarrow{A_nB_n}-\overrightarrow{C_nD_n})=$$
$$=(\overrightarrow{A_1B_1}+\ \dots\ +\overrightarrow{A_nB_n})-(\overrightarrow{C_1D_1}+\ \dots\ +\overrightarrow{C_nD_n}).$$

## §5. Умножение направленного отрезка на число

*Произведением* $0\cdot\overrightarrow{AB}$ *направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *на число* 0 называется нулевой направленный отрезок $\overrightarrow{\theta}_A$. Если $k\neq 0$, то *произведением* $k\overrightarrow{AB}$ *направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *на число* $k$ называется направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$, где $C=H_A^k(B)$ (рис. 1.18, а, б, в). Операция нахождения произведения $k\overrightarrow{AB}$ называется *умножением направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *на число* $k$.




а) $0<k<1$ б) $k>1$ в) $k<0$

Рис. 1.18

Таким образом, направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ равен $k\overrightarrow{AB}$ тогда и только тогда, когда