отношению к сложению в следующем смысле. Если направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$ таковы, что $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$. Иначе говоря, направленный отрезок можно переносить из одной части равенства в другую с противоположным знаком.

□ Действительно, если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CD}$, то, прибавляя к обеим частям этого равенства направленный отрезок $\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{CD}$, получаем

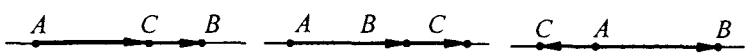
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{\theta}_C=\overrightarrow{MN}$. ■

Если $ABFD$ — параллелограмм (см. рис. 1.14), то направленный отрезок $\overrightarrow{DB}$, где $[DB]$ — диагональ параллелограмма, равен разности $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$. Справедливо правило раскрытия скобок

$$(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{C_1D_1})+\ \dots\ +(\overrightarrow{A_nB_n}-\overrightarrow{C_nD_n})=$$
$$=(\overrightarrow{A_1B_1}+\ \dots\ +\overrightarrow{A_nB_n})-(\overrightarrow{C_1D_1}+\ \dots\ +\overrightarrow{C_nD_n}).$$

§5. Умножение направленного отрезка на число

Произведением $0\cdot\overrightarrow{AB}$ *направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *на число* 0 называется нулевой направленный отрезок $\overrightarrow{\theta}_A$. Если $k\neq 0$, то *произведением* $k\overrightarrow{AB}$ *направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *на число* k называется направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$, где $C=H_A^k(B)$ (рис. 1.18, а, б, в). Операция нахождения произведения $k\overrightarrow{AB}$ называется *умножением направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *на число* k.



а) $0<k<1$ б) $k>1$ в) $k<0$

Рис. 1.18

Таким образом, направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ равен $k\overrightarrow{AB}$ тогда и только тогда, когда

а) направленные отрезки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны;

б) $|\overrightarrow{AC}| = |k| \cdot |\overrightarrow{AB}|$;

в) $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, если $k \geq 0$, и $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$, если $k < 0$.

Сформулируем законы умножения в виде следующих утверждений:

I. $1 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$; $(-1) \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$.

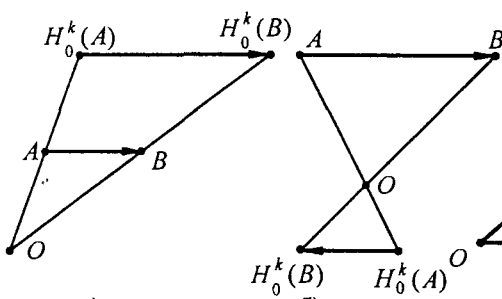
II. *Если* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, *то* $k\,\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$.

III. *Для любых действительных чисел* k_1 *и* k_2 *выполняется равенство* $k_1(k_2\,\overrightarrow{AB}) = k_2(k_1\,\overrightarrow{AB}) = (k_1k_2)\,\overrightarrow{AB}$.

IV. *Если* O — *произвольная точка,* $k \neq 0$ (рис. 1.19, а,б), *то* $\overrightarrow{H_O^k(A)H_O^k(B)} = k\,\overrightarrow{AB}$.

□ Гомотетия H_O^k является преобразованием подобия с коэффициентом $|k|$. Поэтому

$$|\overrightarrow{H_O^k(A)H_O^k(B)}| = |k| \cdot |\overrightarrow{AB}|.$$



а) $k > 0$ б) $k < 0$

Рис. 1.19

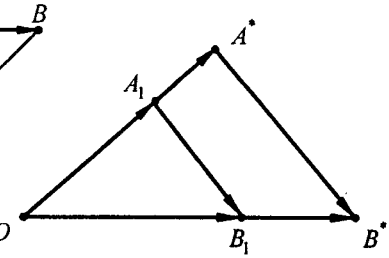


Рис. 1.20

На основании свойства 2° гомотетии (см. Дополнение) направленные отрезки $\overrightarrow{H_O^k(A)H_O^k(B)}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны, причем они сонаправлены, если $k > 0$, и противоположно направлены, если $k < 0$. Таким образом,

$$\overrightarrow{H_O^k(A)H_O^k(B)} = k\,\overrightarrow{AB}. \blacksquare$$

V. *Для любых направленных отрезков* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *и любого действительного числа* k *справедливо равенство* $k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}) = k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{CD}$.

□ При $k=0$ утверждение очевидно. Пусть $k \neq 0$. Рассмотрим произвольную точку O и обозначим $A_1 = T_{\overrightarrow{AB}}(O)$, $B_1 = T_{\overrightarrow{CD}}(A_1)$, $A^* = H_O^k(A_1)$, $B^* = H_O^k(B_1)$ (рис. 1.20). По правилу замыкающей, $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{OB^*} = \overrightarrow{OA^*}+\overrightarrow{A^*B^*}$. Из равенств $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{CD}$ следует, что $k\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{AB}$, $k\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{CD}$ (утверждение II) и что $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ (утверждение IV из §4). По определению гомотетии, $\overrightarrow{OA^*} = k\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB^*} = k\overrightarrow{OB_1}$. Наконец, в силу утверждения IV $\overrightarrow{A^*B^*} = k\overrightarrow{A_1B_1}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{OB^*} = k\overrightarrow{OB_1} = k(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}) = k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}),$$

$$\overrightarrow{OB^*} = \overrightarrow{OA^*}+\overrightarrow{A^*B^*} = k\overrightarrow{OA_1}+k\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{CD},$$

и поэтому

$$k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}) = k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{CD}. \blacksquare$$

VI. *Для любого направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *и любых действительных чисел* k_1 *и* k_2 *справедливо равенство* $(k_1+k_2)\overrightarrow{AB} = k_1\overrightarrow{AB}+k_2\overrightarrow{AB}$.

□ Это утверждение легко проверить, подсчитывая длины направленных отрезков, стоящих в левой и правой частях равенства, учитывая при этом их направление. ■

Законы умножения, сформулированные в утверждениях V и VI, называются законами дистрибутивности.