

Все операции над направленными отрезками, в которых эти отрезки могут быть заменены на любые им равные с сохранением результата операции, а также свойства этих операций переносятся и на векторы.

§2. Сумма векторов. Разность векторов

Если $\vec{a} = \vec{AB}$ — вектор, изображаемый направленным отрезком \vec{AB} , $\vec{b} = \vec{CD}$ — вектор, изображаемый направленным отрезком \vec{CD} , то вектор, изображаемый направленным отрезком $\vec{AB} + \vec{CD}$, называется *суммой* векторов a и b (обозначение: $\vec{a} + \vec{b}$). Из утверждения IV §4 гл.1 следует, что данное определение суммы векторов не зависит от выбора направленных отрезков, изображающих эти векторы.

Приведем законы сложения векторов.

I. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность сложения).

II. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (ассоциативность сложения).

III. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

IV. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Эти законы вытекают из утверждений III, V, I §4 гл.1. В силу ассоциативности сложения сумму трех (и более) векторов можно записывать опуская скобки. Например, для параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.8)

вектор \vec{AC}_1 является суммой

$$\vec{AD} + \vec{DD_1} + \vec{D_1C}_1 = \vec{AD} + \vec{AA_1} + \vec{AB}.$$

Этот факт называется правилом параллелепипеда: вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ суммы трех некомпланарных векторов a , b , c изображается диагональю параллелепипеда, построенного на направленных отрезках, изображающих векторы a , b , c и имеющих общее начало (кратко: построенного на векторах a , b , c).

Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ векторов a и b называется вектор $\vec{a} + (-\vec{b})$. Если векторы a и b изображаются соответственно направленными отрез-

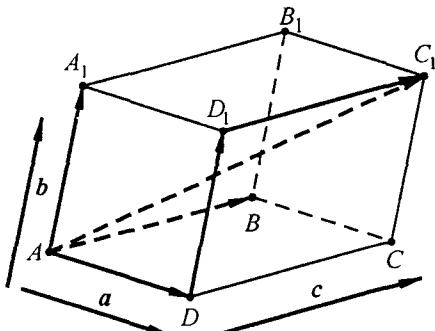


Рис. 2.8

ками \vec{AB} и \vec{CD} , то их разность $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ изображается направленным отрезком $\vec{AB} - \vec{CD}$ (см. §4 гл.1). Если $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$, то $\mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$. Это свойство следует из свойства разности направленных отрезков. Покажем, как можно это свойство вывести из законов сложения векторов. Прибавляя к обеим частям равенства $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ вектор $-\mathbf{b}$, получаем

$$\mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{c} + (-\mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + (-\mathbf{b})) = \mathbf{a} + \vec{0} = \mathbf{a}.$$

Таким образом, слагаемые в векторных равенствах можно переносить из одной части равенства в другую, изменения их знаки на противоположные.

Пример 1. Докажите правило раскрытия скобок:

$$(\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2) + \dots + (\mathbf{a}_n - \mathbf{b}_n) =$$

$$= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n) - (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_n).$$

▲ По определению разности векторов $(\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2) + \dots + (\mathbf{a}_n - \mathbf{b}_n) = (\mathbf{a}_1 + (-\mathbf{b}_1)) + (\mathbf{a}_2 + (-\mathbf{b}_2)) + \dots + (\mathbf{a}_n + (-\mathbf{b}_n))$.

Обозначая последнее выражение через x и опуская часть скобок (в соответствии с договоренностью, основанной на законе ассоциативности сложения), получаем $x = \mathbf{a}_1 + (-\mathbf{b}_1) + \mathbf{a}_2 + (-\mathbf{b}_2) + \dots + \mathbf{a}_n + (-\mathbf{b}_n)$. Применивая несколько раз закон коммутативности сложения, имеем

$$x = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n) + (-\mathbf{b}_1) + (-\mathbf{b}_2) + \dots + (-\mathbf{b}_n).$$

Если теперь к x прибавить сумму $(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_n)$, использовать свойства ассоциативности и коммутативности сложения и учесть n раз IV и III законы сложения векторов, то получим

$$x + (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_n) =$$

$$= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n) + (-\mathbf{b}_1) + (-\mathbf{b}_2) + \dots + (-\mathbf{b}_n) + \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_n =$$

$$= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n) + (\mathbf{b}_1 + (-\mathbf{b}_1)) + (\mathbf{b}_2 + (-\mathbf{b}_2)) + \dots + (\mathbf{b}_n + (-\mathbf{b}_n)) =$$

$$= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n) + \vec{0} + \vec{0} + \dots + \vec{0} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n.$$

По правилу переноса слагаемых из одной части векторного равенства в другую имеем $x = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n) - (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_n)$. ▼

Пример 2. Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ (см. рис. 2.4). Найдите сумму векторов

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF}.$$

▲ Диагонали правильного шестиугольника, пересекающиеся в точке O , делятся этой точкой пополам. Лучи $[OA]$ и $[OD]$ противоположно направлены. Поэтому $\vec{OA} = -\vec{OD}$. Аналогично, $\vec{OB} = -\vec{OE}$, $\vec{OC} = -\vec{OF}$. Отсюда $\vec{OA} + \vec{OD} = \vec{0}$, $\vec{OB} + \vec{OE} = \vec{0}$, $\vec{OC} + \vec{OF} = \vec{0}$ и, значит,

$$\begin{aligned}\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF} &= \\ = (\vec{OA} + \vec{OD}) + (\vec{OB} + \vec{OE}) + (\vec{OC} + \vec{OF}) &= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}. \blacksquare\end{aligned}$$

В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ выполнено также равенство $\vec{AD} + \vec{EB} + \vec{CF} = \vec{0}$. Действительно, так как $ODEF$ — параллелограмм, то $\vec{OE} = \vec{OD} + \vec{OF}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\vec{AD} + \vec{EB} + \vec{CF} &= (\vec{AO} + \vec{OD}) - (\vec{BO} + \vec{OE}) + (\vec{CO} + \vec{OF}) = \\ &= \vec{OD} + \vec{OD} - (\vec{OE} + \vec{OE}) + \vec{OF} + \vec{OF} = \\ &= (\vec{OD} + \vec{OF}) + (\vec{OD} + \vec{OF}) - (\vec{OE} + \vec{OE}) = \vec{OE} + \vec{OE} - (\vec{OE} + \vec{OE}) = \\ &= (\vec{OE} - \vec{OE}) + (\vec{OE} - \vec{OE}) = \\ &= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Пример 3. Докажите, что в треугольнике ABC (рис. 2.9) медианы $[AK]$, $[CM]$ и $[BN]$ пересекаются в одной точке; если Q — точка пересечения медиан

треугольника ABC , то $\vec{QA} + \vec{QB} + \vec{QC} = \vec{0}$.

▲ Пусть Q — общая точка отрезков $[AK]$ и $[CM]$. На основании свойства средней линии треугольника имеем $(MK) \parallel (AC)$. Значит, треугольники QMK и QCA подобны (по трем углам), поэтому

$$|QC| : |MQ| = |QA| : |KQ| = |AC| : |MK| = 2.$$

Таким образом, если на медиане $[AK]$ взять точку Q , делящую отрезок $[AK]$ в отношении $2:1$, считая от вершины A , то точка Q будет ле-

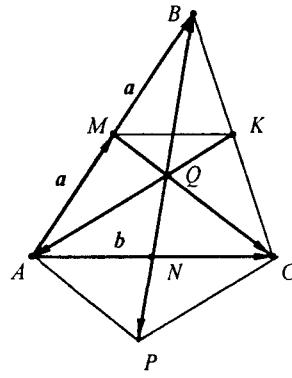


Рис. 2.9

жать на медиане $[CM]$, причем $|CQ|:|QM|=2:1$. Проводя аналогичные рассуждения относительно медиан $[AK]$ и $[BN]$, видим, что точка Q лежит на медиане $[BN]$ и делит ее в отношении $|BQ|:|QN|=2:1$. Отсюда следует, что медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке Q , а для точки P , симметричной точке Q относительно точки N (рис. 2.9),

выполнено равенство $\vec{QB}=-\vec{QP}$. Поскольку $P=Z_N(Q)$, $A=Z_N(C)$,

четырехугольник $AQCP$ — параллелограмм, так что $\vec{QA}+\vec{QC}=\vec{QP}$.

Окончательно получаем $\vec{QA}+\vec{QB}+\vec{QC}=\vec{QP}+\vec{QB}=\vec{QP}+(-\vec{QP})=\vec{0}$. ▼

Пример 4. Докажите, что для любых векторов a и b справедливы неравенства треугольника:

$$|a+b|\leq|a|+|b|, \quad |a-b|\geq|a|-|b|. \quad (2.2)$$

Проверьте, что равенство $|a+b|=|a|+|b|$ имеет место тогда и только тогда, когда $a \uparrow \uparrow b$, равенство $|a-b|=|a|-|b|$ имеет место тогда и только тогда, когда $a \uparrow \uparrow b$ и $|a|\geq|b|$.

▲ Если один из векторов a или b нулевой, то эти неравенства очевидны. Пусть a и b — ненулевые векторы и пусть направленный отрезок \vec{AB}

изображает вектор a . Отложим вектор $\vec{b}=\vec{BC}$ от точки B (рис. 2.10). Тогда направленный отрезок \vec{AC} изображает вектор $a+b$. На основании свойств 3° и 4° расстояния (см. §1 гл. 1) получаем

$$|a+b|=|\vec{AC}|\leq|\vec{AB}|+|\vec{BC}|=|a|+|b|,$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $B \in [AC]$, т.е. когда векторы a и b сонаправлены. Заменяя в последнем неравенстве вектор a на вектор $a-b$, получаем $|a|=|(a-b)+b|\leq|a-b|+|b|$. Следовательно, $|a-b|\geq|a|-|b|$. Равенство $|a-b|=|a|-|b|$, как доказано выше, имеет место тогда и только тогда, когда векторы $a-b$ и b сонаправлены, т.е. сонаправлены векторы b и $a=(a-b)+b$ и

$$|a|=|a-b|+|b|\geq|b|. \quad \blacktriangleleft$$

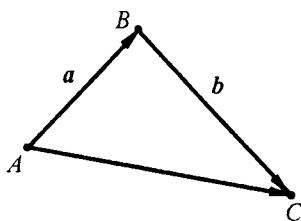


Рис. 2.10

Пример 5. Пусть A, B, C, D — некоторые точки пространства или плоскости, M — середина $[AB]$, N — середина $[CD]$, O — середина $[MN]$. Докажите, что:

- 1) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$;
- 2) $\vec{MN} + \vec{MN} = \vec{BC} + \vec{AD}$;
- 3) $|MN| \leq \frac{1}{2}(|BC| + |AD|)$.

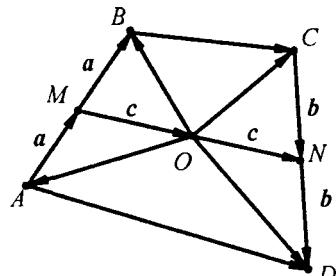


Рис. 2.11

▲ 1) Направленные отрезки $\vec{AM} = \vec{MB}$ изображают один и тот же вектор,

который обозначим a . Аналогично, положим $\vec{CN} = \vec{ND} = b$, $\vec{MO} = \vec{ON} = c$ (рис. 2.11). Тогда $\vec{OA} = \vec{OM} + \vec{MA} = (-c) + (-a)$, $\vec{OB} = a - c$, $\vec{OC} = c - b$, $\vec{OD} = b + c$. Поэтому (см. пример 1)

$$\begin{aligned} & \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \\ & = (-c) + (-a) + a - c + c - b + b + c = (a - a) + (c - c) + (b - b) + (c - c) = \\ & = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}. \end{aligned}$$

2) По правилу замыкающей, $\vec{BC} = \vec{BM} + \vec{MN} + \vec{NC}$, $\vec{AD} = \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{ND}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \vec{BC} + \vec{AD} &= (\vec{BM} + \vec{AM}) + \vec{MN} + \vec{MN} + (\vec{NC} + \vec{ND}) = \\ &= \vec{0} + \vec{MN} + \vec{MN} + \vec{0} = \vec{MN} + \vec{MN}. \end{aligned}$$

3) На основании неравенства треугольника $|\vec{BC} + \vec{AD}| \leq |\vec{BC}| + |\vec{AD}| = |BC| + |AD|$. Так как $\vec{MN} \uparrow\uparrow \vec{BC}$, то $|\vec{MN} + \vec{MN}| = |\vec{MN}| + |\vec{MN}| = 2|\vec{MN}|$ (см. пример 4). Окончательно имеем

$$2|\vec{MN}| = |\vec{MN} + \vec{MN}| = |\vec{BC} + \vec{AD}| \leq |BC| + |AD|. \quad \blacktriangleright$$

Пример 6. Докажите, что для любого вектора \mathbf{a} имеет место равенство $-\mathbf{(-a)} = \mathbf{a}$.

▲ Пусть $\mathbf{x} = -\mathbf{(-a)}$. Тогда на основании законов IV и I сложения векторов $\mathbf{x} + \mathbf{(-a)} = \vec{0}$. Прибавляя к обеим частям этого равенства вектор \mathbf{a} , получаем $\mathbf{a} = \vec{0} + \mathbf{a} = \mathbf{x} + \mathbf{(-a)} + \mathbf{a} = \mathbf{x} + (\mathbf{a} + \mathbf{(-a)}) = \mathbf{x} + \vec{0} = \mathbf{x}$. ▼

§3. Умножение вектора на число. Признак коллинеарности векторов. Векторное параметрическое уравнение прямой. Деление отрезка в заданном отношении

Если \mathbf{a} — вектор, изображаемый направленным отрезком \vec{AB} , k — действительное число, то *произведением $k\mathbf{a}$ вектора \mathbf{a} на число k* называется вектор, изображаемый направленным отрезком \vec{kAB} . Произведение $k\mathbf{a}$ обозначают также \mathbf{ak} . Для краткости, если $k \neq 0$, произведение $\frac{1}{k}\mathbf{a}$ записывают в виде \mathbf{a}/k .

Приведем законы умножения вектора на число.

$$\text{I. } 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad 0 \cdot \mathbf{a} = \vec{0}, \quad k \vec{0} = \vec{0}, \quad (-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}.$$

$$\text{II. } |k\mathbf{a}| = |k| \cdot |\mathbf{a}|.$$

$$\text{III. } k\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{a}, \text{ если } k \geq 0, \quad k\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a}, \text{ если } k \leq 0.$$

Если k и m — действительные числа, \mathbf{a} и \mathbf{b} — векторы, то:

$$\text{IV. } k(m\mathbf{a}) = (km)\mathbf{a} \text{ (ассоциативность умножения на число).}$$

$$\text{V. } (k+m)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + m\mathbf{a}, \quad \left. \begin{array}{l} \text{(дистрибутивность} \\ \text{умножения на число).} \end{array} \right.$$

$$\text{VI. } k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b} \quad \left. \begin{array}{l} \text{умножения на число).} \end{array} \right.$$

Эти законы непосредственно следуют из свойств умножения направленного отрезка на число (см. §5 гл. 1).

Пример 1. Докажите равенство $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a}$, используя остальные законы умножения вектора на число.

▲ Действительно, $\vec{0} = 0 \cdot \mathbf{a} = (1 + (-1))\mathbf{a}$. Поэтому $-\mathbf{a} = (-\mathbf{a}) + \vec{0} = (-\mathbf{a}) + (1 + (-1))\mathbf{a} = (-\mathbf{a}) + 1 \cdot \mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = ((-\mathbf{a}) + \mathbf{a}) + (-1)\mathbf{a} = \vec{0} + (-1)\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a}$. ▼