Пример 6. Докажите, что для любого вектора $\boldsymbol{a}$ имеет место равенство $-(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$.

▲ Пусть $\boldsymbol{x} = -(-\boldsymbol{a})$. Тогда на основании законов IV и I сложения векторов $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{a}) = \vec{0}$. Прибавляя к обеим частям этого равенства вектор $\boldsymbol{a}$, получаем $\boldsymbol{a} = \vec{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a})) = \boldsymbol{x} + \vec{0} = \boldsymbol{x}$. ▼

§3. Умножение вектора на число. Признак коллинеарности векторов. Векторное параметрическое уравнение прямой. Деление отрезка в заданном отношении

Если $\boldsymbol{a}$ — вектор, изображаемый направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, k — действительное число, то *произведением* $k\boldsymbol{a}$ *вектора* $\boldsymbol{a}$ *на число* k называется вектор, изображаемый направленным отрезком $k\overrightarrow{AB}$. Произведение $k\boldsymbol{a}$ обозначают также $\boldsymbol{a}k$. Для краткости, если $k \neq 0$, произведение $\frac{1}{k}\boldsymbol{a}$ записывают в виде $\boldsymbol{a} / k$.

Приведем законы умножения вектора на число.

I. $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, $0 \cdot \boldsymbol{a} = \vec{0}$, $k\vec{0} = \vec{0}$, $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$.

II. $|k\boldsymbol{a}| = |k| \cdot |\boldsymbol{a}|$.

III. $k\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{a}$, *если* $k \geq 0$, $k\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{a}$, *если* $k \leq 0$.

Если k *и* m *— действительные числа,* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *— векторы, то*:

IV. $k(m\boldsymbol{a}) = (km)\boldsymbol{a}$ (ассоциативность умножения на число).

$$\left.\begin{array}{l} \text{V. } (k+m)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{a}, \\ \text{VI. } k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b} \end{array}\right\} \text{(дистрибутивность умножения на число).}$$

Эти законы непосредственно следуют из свойств умножения направленного отрезка на число (см. §5 гл. 1).

Пример 1. Докажите равенство $-\boldsymbol{a} = (-1)\boldsymbol{a}$, используя остальные законы умножения вектора на число.

▲ Действительно, $\vec{0} = 0 \cdot \boldsymbol{a} = (1 + (-1))\boldsymbol{a}$. Поэтому $-\boldsymbol{a} = (-\boldsymbol{a}) + \vec{0} =$

$= (-\boldsymbol{a}) + (1 + (-1))\boldsymbol{a} = (-\boldsymbol{a}) + 1 \cdot \boldsymbol{a} + (-1)\boldsymbol{a} = ((-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}) + (-1)\boldsymbol{a} = \vec{0} + (-1)\boldsymbol{a} =$

$= (-1)\boldsymbol{a}$. ▼

Пример 2. Докажите, что если $m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$, то

$$(m-k)\boldsymbol{a} + (n-l)\boldsymbol{b} = \vec{0}.$$

▲ Перенося векторы из правой части равенства $m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$ в левую, получаем $(m\boldsymbol{a} - k\boldsymbol{a}) + (n\boldsymbol{b} - l\boldsymbol{b}) = \vec{0}$. На основании законов I и IV умножения вектора на число $-k\boldsymbol{a} = (-1)\cdot(k\boldsymbol{a}) = (-k)\boldsymbol{a}$. По закону V имеем $m\boldsymbol{a} - k\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{a} + (-k\boldsymbol{a}) = m\boldsymbol{a} + (-k)\boldsymbol{a} = (m-k)\boldsymbol{a}$. Аналогично можно доказать, что $n\boldsymbol{b} - l\boldsymbol{b} = (n-l)\boldsymbol{b}$. Таким образом,

$$m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} \Leftrightarrow (m-k)\boldsymbol{a} + (n-l)\boldsymbol{b} = \vec{0}. \ ▼$$

Из законов II и III следует признак коллинеарности векторов: вектор $\boldsymbol{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\boldsymbol{a}$ тогда и только тогда, когда существует такое число k, что $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$. По коллинеарным векторам $\boldsymbol{a} \neq \vec{0}$ и $\boldsymbol{b}$ число k определяется однозначно: $|k| = |\boldsymbol{b}|/|\boldsymbol{a}|$, причем $k = |\boldsymbol{b}|/|\boldsymbol{a}|$, если $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$, и $k = -|\boldsymbol{b}|/|\boldsymbol{a}|$, если $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$.

Пример 3. Докажите, что для неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равенство $m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} = \vec{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $m = n = 0$.

▲ Доказательство проведем методом от противного. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — неколлинеарные векторы такие, что $m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b} = \vec{0}$ и $m \neq 0$. Тогда

$$\vec{0} = (1/m)\ \vec{0} = (1/m)(m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}) = (1/m)(m\boldsymbol{a}) + (1/m)(n\boldsymbol{b}) =$$
$$= 1\cdot\boldsymbol{a} + (n/m)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - (-n/m)\boldsymbol{b},$$

т.е. $\boldsymbol{a} = (-n/m)\boldsymbol{b}$, и в силу признака коллинеарности векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. Таким образом, имеет место противоречие. Аналогично доказывается, что предположение $n \neq 0$ также приводит к противоречию. ▼

В этом и последующих примерах не указывается, какие законы и в какой последовательности использованы.

Пример 4. Докажите, что для неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равенство

$$m_1\boldsymbol{a} + n_1\boldsymbol{b} = m_2\boldsymbol{a} + n_2\boldsymbol{b} \tag{2.3}$$

эквивалентно системе равенств

$$m_1 = m_2, \quad n_1 = n_2. \tag{2.4}$$

▲ Как показано в примере 2, равенство (2.3) эквивалентно равенству $(m_1 - m_2)\boldsymbol{a} + (n_1 - n_2)\boldsymbol{b} = \vec{0}$. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, следовательно, в соответствии с примером 3 полученное соотношение эквивалентно двум равенствам: $m_1 - m_2 = 0$ и $n_1 - n_2 = 0$. ▼

Пример 5. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны. При каком x векторы $\boldsymbol{c} = (x-1)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d} = (2+3x)\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ коллинеарны?

▲ Вектор $\boldsymbol{c} = (x-1)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ ненулевой (если бы выполнялись равенства $\vec{0} = \boldsymbol{c} = (x-1)\boldsymbol{a} + 1 \cdot \boldsymbol{b}$, то в силу неколлинеарности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и результата примера 3 имели бы место равенства $x - 1 = 0$, $1 = 0$, т.е. получилось бы противоречие). Согласно признаку коллинеарности векторы $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{c}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число y такое, что $\boldsymbol{d} = y\boldsymbol{c}$, т.е. $(2+3x)\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} = y(x-1)\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны. Поэтому в силу результата примера 4 полученное равенство эквивалентно системе уравнений $2 + 3x = y(x-1)$, $-2 = y$, т.е. системе $x = 0$, $y = -2$. Следовательно, векторы $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $x = 0$, т.е. $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d} = 2(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$. ▼

Пусть в пространстве или на плоскости зафиксирована некоторая точка O, называемая *полюсом*. Тогда между точками A пространства (плоскости) и направленными отрезками $\overrightarrow{OA}$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. Вектор $\boldsymbol{r}_A$, изображаемый направленным отрезком $\overrightarrow{OA}$, называется *радиус-вектором точки A относительно полюса O*. По заданному радиус-вектору $\boldsymbol{r}_A$ точка A находится как конец вектора $\boldsymbol{r}_A$, отложенного от полюса O.

Пример 6 (векторное параметрическое уравнение прямой). Пусть в пространстве или на плоскости зафиксирован полюс O. Пусть, далее, l — прямая, проходящая через две заданные различные точки A и B. Опишите множество радиус-векторов всех точек прямой l.

▲ Пусть $\boldsymbol{r}_A$ и $\boldsymbol{r}_B$ — радиус-векторы точек A и B соответственно. Обозначим через $\boldsymbol{a}$ вектор, изображаемый направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, т.е. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$ (рис. 2.12). Через $\boldsymbol{r}$ обозначим радиус-вектор произвольной точки M прямой l. Точка M лежит на прямой l тогда и только тогда,

когда векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\boldsymbol{a}$ коллинеарны. Согласно признаку коллинеарности это имеет место тогда и только тогда, когда существует число t (зависящее от M) такое, что выполняется равенство $\overrightarrow{AM} = t\boldsymbol{a}$. Так как $\overrightarrow{AM} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_A$, то вектор $\boldsymbol{r}$ является радиус-вектором точки $M \in l$ тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + t\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$. Таким образом, множество всех радиус-векторов точек прямой l есть совокупность векторов вида

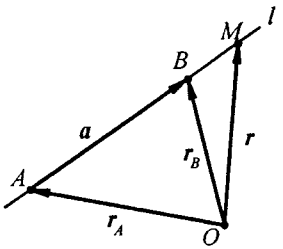

Рис. 2.12

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_* + t\boldsymbol{a}, \tag{2.5}$$

где $\boldsymbol{r}_* = \boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$, t — произвольное действительное число. Вектор $\boldsymbol{a}$ называется *направляющим вектором прямой* l, $\boldsymbol{r}_*$ — *радиус-вектором начальной точки прямой* l, t — *параметром*, а соотношение (2.5) — векторным параметрическим уравнением прямой. ▼

Соотношение (2.5) можно записать в виде $\boldsymbol{r} = (1-t)\boldsymbol{r}_A + t\boldsymbol{r}_B$, или в виде $\boldsymbol{r} = \tau\boldsymbol{r}_A + t\boldsymbol{r}_B$, где t и τ — произвольные действительные числа, связанные соотношением $t + \tau = 1$. Система уравнений $\boldsymbol{r} = \tau\boldsymbol{r}_A + t\boldsymbol{r}_B$, $t + \tau = 1$ параметрически задает прямую, проходящую через точки A и B. Числа $t = t(M)$ и $\tau = \tau(M)$ называются *барицентрическими координатами точки* M *на ориентированной* (вдоль вектора $\boldsymbol{a}$) *прямой* AB.

Установим геометрический смысл параметра t в соотношении (2.5). Так как $\overrightarrow{AM} = t\boldsymbol{a}$, где $t = t(M)$, то $|\overrightarrow{AM}| = |t| \cdot |\boldsymbol{a}|$, т.е. $|t| = |\overrightarrow{AM}| : |\boldsymbol{a}|$. Число t положительное, если точка $M \neq A$ лежит на $[AB]$ или если $B \in [AM]$. Число t отрицательное, если $M \neq A$ и $A \in [MB]$; $t = 0$ тогда и только тогда, когда точка M совпадает с точкой A.

Пример 7 (задача о делении отрезка в заданном отношении). Пусть A и B — различные точки, заданные радиус-векторами $\boldsymbol{r}_A$ и $\boldsymbol{r}_B$ относительно полюса O, λ — положительное число. Найдите радиус-вектор $\boldsymbol{r}_M$ точки M отрезка $[AB]$, делящей этот отрезок в отношении λ, считая от точки A.

▲ Точка M лежит на прямой (AB) между точками A и B, поэтому $\boldsymbol{r}_M = \boldsymbol{r}_A + t(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)$, где $t = |AM|/|AB| > 0$. Согласно условию,

$$\lambda = |AM|/|MB|.$$

Следовательно,

$$|AB| = |AM| + |MB| = |AM| + |AM|/\lambda = (\lambda + 1)|AM|/\lambda.$$

Таким образом, $t = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$ и $\boldsymbol{r}_M = \boldsymbol{r}_A + \dfrac{\lambda}{\lambda+1}(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A) = \dfrac{1}{\lambda+1}\boldsymbol{r}_A + \dfrac{\lambda}{\lambda+1}\boldsymbol{r}_B$.

Соотношение

$$\boldsymbol{r}_M = (\boldsymbol{r}_A + \lambda \boldsymbol{r}_B)/(\lambda + 1) \tag{2.6}$$

называется формулой деления отрезка в заданном отношении. ▼

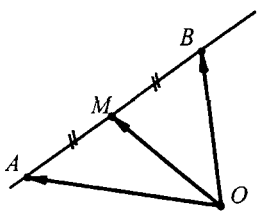

Рис. 2.13

При $\lambda = 1$ точка M — середина отрезка $[AB]$. Отрезок $[OM]$ — медиана треугольника OAB (рис. 2.13). Вектор $\boldsymbol{r}_M = \overrightarrow{OM}$ равен $\boldsymbol{r}_A/2 + \boldsymbol{r}_B/2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})/2$.

Пример 8. Используя векторы и операции над ними, докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из медиан в отношении $2:1$, считая от вершины.

▲ Пусть в треугольнике ABC точки K и M — середины сторон $[BC]$ и $[AB]$ соответственно, Q — точка пересечения медиан $[AK]$ и $[CM]$ (см. рис. 2.9).

Обозначая $\lambda = |CQ|/|QM|$, $\mu = |AQ|/|QK|$, докажем, что $\lambda = \mu = 2$. Пусть $\overrightarrow{AM} = \boldsymbol{a}$ (тогда $\overrightarrow{AB} = 2\boldsymbol{a}$), $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$. По формуле деления отрезка $[CM]$ точкой Q в отношении λ имеем $\overrightarrow{AQ} = (\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{a})/(\lambda + 1)$.

Следовательно, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QK} = \overrightarrow{AQ} + \dfrac{\overrightarrow{AQ}}{\mu} = \dfrac{\mu+1}{\mu} \cdot \dfrac{\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{a}}{\lambda+1}$. Точка K делит отрезок $[CB]$ в отношении $1:1$, поэтому $\overrightarrow{AK} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})/2 = (\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{a})/2$. Сравнивая полученные для вектора $\overrightarrow{AK}$ выражения, прихо-

дим к равенству $\frac{\mu+1}{\mu}\cdot\frac{\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{a}}{\lambda+1}=\frac{\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}}{2}$. В силу неколлинеарности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ отсюда следует, что $\frac{\mu+1}{\mu}\cdot\frac{1}{\lambda+1}=\frac{1}{2}$, $\frac{\mu+1}{\mu}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+1}=1$. Разделив одно из этих равенств на другое, получим $\lambda=2$. Следовательно, $(\mu+1)/\mu=3/2$, т.е. $\mu=2$. Итак, доказано, что точка Q, лежащая на медиане $[CM]$ и делящая ее в отношении $2:1$, лежит и на медиане $[AK]$ и делит ее в том же отношении. Аналогично можно установить, что та же самая точка Q медианы $[CM]$ лежит и на медиане $[BN]$ и делит ее в отношении $2:1$, считая от вершины B. Следовательно, все три медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины. ▼

Пример 9. Найдите, на какое число k надо умножить ненулевой вектор $\boldsymbol{a}$, чтобы длина вектора $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ была равна единице, причем:

а) вектор $\boldsymbol{b}$ был сонаправлен вектору $\boldsymbol{a}$;

б) вектор $\boldsymbol{b}$ был противоположно направлен вектору $\boldsymbol{a}$.

▲ а) Так как $k\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{a}\Leftrightarrow k\geq 0$ (III), то $k=|k|=|\boldsymbol{b}|:|\boldsymbol{a}|=1/|\boldsymbol{a}|$ (II).

б) Имеем $k\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{a}\Leftrightarrow k\leq 0$. Следовательно, $-k=|k|=|\boldsymbol{b}|/|\boldsymbol{a}|=$ $=1/|\boldsymbol{a}|$ и $k=-1/|\boldsymbol{a}|$.

Таким образом, вектор $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ сонаправлен вектору $\boldsymbol{a}\neq\vec{0}$ и имеет единичную длину. Всякий вектор единичной длины называется *единичным* вектором. Вектор $-\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ — единичный вектор, противоположно направленный вектору $\boldsymbol{a}$. ▼

Пример 10. В треугольнике ABC проведена биссектриса $[CD]$ внутреннего угла $\angle C$. Выразите вектор $\vec{CD}$ через векторы $\boldsymbol{a}=\vec{CA}$, $\boldsymbol{b}=\vec{CB}$ и их длины.

▲ Отложим от точки C единичные векторы $\vec{CM}=\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ и $\vec{CN}=\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{b}/|\boldsymbol{b}|$ (точки M и N лежат на лучах $[CA)$ и $[CB)$ и находятся от точки C на расстоянии, равном 1). Рассмотрим построенный на направленных отрезках $\vec{CM}$ и $\vec{CN}$ как на сторонах параллелограмм $CNPM$

(рис. 2.14). Так как $|\vec{CM}| = |\vec{CN}| = 1$, то этот параллелограмм — ромб. Значит, его диагональ $[CP]$ и есть биссектриса угла $\angle C$. Векторы $\vec{CD}$ и $\vec{CP} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ коллинеарны, причем $\vec{CP} \neq \vec{0}$. Поэтому существует такое число x, что $\vec{CD} = x\vec{CP} = x\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}| + x\boldsymbol{b}/|\boldsymbol{b}|$. С другой стороны, точка D делит отрезок $[AB]$ в некотором (пока неизвестном) отношении $\lambda = |AD|:|DB|$. Следовательно, по формуле (2.6), $\vec{CD} = (\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b})/(\lambda + 1)$. Сравнивая полученные для вектора $\vec{CD}$ выражения и учитывая неколлинеарность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, имеем $x/|\boldsymbol{a}| = 1/(\lambda+1)$, $x/|\boldsymbol{b}| = \lambda/(\lambda+1)$.

Отсюда $\lambda = \dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$, $\vec{CD} = \dfrac{\boldsymbol{a} + \dfrac{|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}}{\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|} + 1} = \dfrac{|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|}$. Отметим, что равенство $\lambda = |\boldsymbol{a}|/|\boldsymbol{b}|$ означает, что биссектриса внутреннего угла $\angle C$ треугольника ABC делит противоположную сторону $[AB]$ в отношении $|AD|:|DB| = |CA|:|CB|$, т.е. на части, пропорциональные сторонам, прилежащим углу $\angle C$. ▼

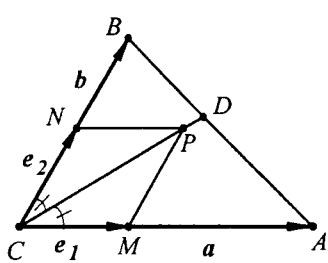

Рис. 2.14

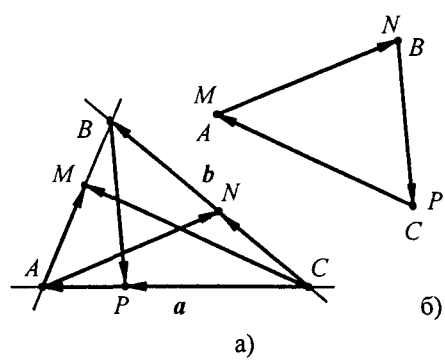

Рис. 2.15

Пример 11. Дан треугольник ABC. На прямых (AB), (BC), (CA) выбраны соответственно точки M, N, P так, что $\vec{AM} = \alpha\vec{AB}$, $\vec{BN} = \beta\vec{BC}$,

$\overrightarrow{CP} = \gamma\,\overrightarrow{CA}$, где α, β и γ — действительные числа. При каком необходимом и достаточном условии векторы $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BP}$ образуют треугольник, т.е. $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \vec{0}$?

▲ Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{CA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{CB}$ (см. рис. 2.15, а, б). Тогда $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AM} = \alpha(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$, $\overrightarrow{CN} = (1-\beta)\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CP} = \gamma\boldsymbol{a}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = (1-\alpha)\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = -\boldsymbol{a} + (1-\beta)\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = -\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{a},$$

поэтому $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = (\gamma - \alpha)\boldsymbol{a} + (\alpha - \beta)\boldsymbol{b}$. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, поэтому $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\gamma - \alpha = 0$, $\alpha - \beta = 0$, т.е. когда $\alpha = \beta = \gamma$. ▼

Пример 12. В треугольнике ABC точки M, N и P — основания биссектрис, соответственно, $[CM]$, $[AN]$ и $[BP]$ внутренних углов треугольника. Известно, что $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \vec{0}$. Докажите, что треугольник ABC — правильный.

▲ Пусть $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \beta\,\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \gamma\,\overrightarrow{CA}$. Тогда, как доказано в примере 10,

$$\alpha = \frac{|AC|}{|AC|+|BC|}, \quad \beta = \frac{|AB|}{|AB|+|AC|}, \quad \gamma = \frac{|BC|}{|BC|+|AB|}.$$

В примере 11 показано, что из равенства $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \vec{0}$ следуют равенства $\alpha = \beta = \gamma$, т.е. равенства $\dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{1}{\alpha} - 1 = \dfrac{|AC|}{|AB|} = \dfrac{1}{\beta} - 1 = \dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{1}{\gamma} - 1$. Из этих равенств получаем $|AC|^2 = |AB|\cdot|BC|$, $|AB|^2 = |AC|\cdot|BC|$.

Разделив первое соотношение почленно на второе, имеем: $|AC|^3 = |AB|^3$, т.е. $|AC| = |AB|$. Следовательно, $|AC|^2 = |AC|\cdot|BC|$, т.е. и $|AC| = |BC|$. ▼

Пример 13. На сторонах $[BC]$ и $[CD]$ параллелограмма $ABCD$ взяты точки F и E так, что $\frac{|BF|}{|FC|}=\mu$, $\frac{|DE|}{|EC|}=\lambda$, где λ и μ — заданные положительные числа (см. рис. 2.2). Прямые (FD) и (AE) пересекаются в точке O. Найдите отношение $\frac{|FO|}{|OD|}$.

▲ Обозначим $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Из равенств $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BC}=$ $=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{BF}+\frac{1}{\mu}\overrightarrow{BF}=\frac{\mu+1}{\mu}\overrightarrow{BF}$ находим, что $\overrightarrow{BF}=\frac{\mu\boldsymbol{a}}{\mu+1}$. Аналогично получаем, что $\overrightarrow{DE}=\frac{\lambda\boldsymbol{b}}{\lambda+1}$. Следовательно, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{a}+\frac{\lambda\boldsymbol{b}}{\lambda+1}$, $\overrightarrow{FD}=-\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-\frac{\mu\boldsymbol{a}}{\mu+1}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}}{\mu+1}-\boldsymbol{b}$. Рассмотрим цикл $AODA$. По правилу цикла,

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}. \tag{2.7}$$

Векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OD}$ неизвестны. Однако они коллинеарны векторам $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{FD}$ соответственно, поэтому существуют (неизвестные) такие числа x и y, что $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AE}=x\boldsymbol{a}+\frac{\lambda x\boldsymbol{b}}{\lambda+1}$, $\overrightarrow{OD}=y\overrightarrow{FD}=\frac{y\boldsymbol{a}}{\mu+1}-y\boldsymbol{b}$. Подставляя полученные выражения в равенство (2.7), имеем

$$\left(x\boldsymbol{a}+\frac{\lambda x\boldsymbol{b}}{\lambda+1}\right)+\left(\frac{y\boldsymbol{a}}{\mu+1}-y\boldsymbol{b}\right)-\boldsymbol{a}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(x+\frac{y}{\mu+1}-1\right)\boldsymbol{a}+\left(\frac{\lambda x}{\lambda+1}-y\right)\boldsymbol{b}=\vec{0}.$$

Так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то получаем систему уравнений

$$x+\frac{y}{\mu+1}=1,\quad \frac{\lambda x}{\lambda+1}=y,$$

решая которую, находим

$$y=\frac{\lambda(1+\mu)}{\lambda+(1+\lambda)(1+\mu)},\quad x=\frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{\lambda+(1+\lambda)(1+\mu)}.$$

Следовательно,

$$|FO|:|OD| = \frac{|FD|-|OD|}{|OD|} = \frac{|FD|}{|OD|} - 1 = \frac{1-y}{y} = \frac{1+\lambda+\mu}{\lambda(1+\mu)}. \blacktriangledown$$

Отметим, что в этом примере получено также и выражение для отношения $|AO|:|OE| = \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{(1+\lambda)(1+\mu)}{\lambda}$.

§4. Матрицы, определители, системы линейных уравнений (случаи $n = 2$ и $n = 3$)

Таблица $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ называется *матрицей второго порядка. Элементы* α_1 и α_2 образуют первую *строку* матрицы, β_1 и β_2 — вторую строку, α_1 и β_1 — первый *столбец*, α_2 и β_2 — второй столбец этой матрицы. Таблица

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

называется *матрицей третьего порядка. Элементы* α_1, α_2, α_3 образуют ее первую *строку*, α_1, β_1, γ_1 — ее первый *столбец* и т.д.

Будем рассматривать только матрицы, у которых либо все строки (столбцы) состоят из чисел, либо одна строка (столбец) состоит из векторов, а остальные строки (столбцы) состоят из чисел. Для таких матриц можно ввести понятие детерминанта (определителя) матрицы. *Детерминантом* матрицы $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ называется выражение $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$, которое обозначается

$$\det A,\ \det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

и называется также *определителем второго порядка.* Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2; \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & -2 \\ \boldsymbol{b} & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}\cdot 1 - (-2)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}.$$