$$|FO|:|OD| = \frac{|FD|-|OD|}{|OD|} = \frac{|FD|}{|OD|} - 1 = \frac{1-y}{y} = \frac{1+\lambda+\mu}{\lambda(1+\mu)}. \blacktriangledown$$

Отметим, что в этом примере получено также и выражение для отношения $|AO|:|OE| = \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{(1+\lambda)(1+\mu)}{\lambda}$.

§4. Матрицы, определители, системы линейных уравнений (случаи $n = 2$ и $n = 3$)

Таблица $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ называется *матрицей второго порядка. Элементы* α_1 и α_2 образуют первую *строку* матрицы, β_1 и β_2 — вторую строку, α_1 и β_1 — первый *столбец*, α_2 и β_2 — второй столбец этой матрицы. Таблица

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

называется *матрицей третьего порядка. Элементы* α_1, α_2, α_3 образуют ее первую *строку*, α_1, β_1, γ_1 — ее первый *столбец* и т.д.

Будем рассматривать только матрицы, у которых либо все строки (столбцы) состоят из чисел, либо одна строка (столбец) состоит из векторов, а остальные строки (столбцы) состоят из чисел. Для таких матриц можно ввести понятие детерминанта (определителя) матрицы. *Детерминантом* матрицы $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ называется выражение $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$, которое обозначается

$$\det A,\ \det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

и называется также *определителем второго порядка.* Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2; \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & -2 \\ \boldsymbol{b} & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{a}\cdot 1 - (-2)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}.$$

Детерминантом матрицы B третьего порядка (см. (2.8)) называется выражение

$$\alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}-\alpha_2\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}+\alpha_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}=$$

$$=\alpha_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)-\alpha_2(\beta_1\gamma_3-\beta_3\gamma_1)+\alpha_3(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1),$$

которое обозначается

$$\det B,\ \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}\ \text{или}\ \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

и называется также *определителем третьего порядка.* Например,

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & -3\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 4 & -2\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & -2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=((-1)(-2)-(-3)\cdot 4)+(2\cdot(-2)-(-3)\cdot(-3))+(2\cdot 4-(-1)\cdot(-3))=$$

$$=2+12-4-9+8-3=6;$$

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\\ -3 & 1 & 4\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\\ 1 & 4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\\ -3 & 4\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ -3 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=2(4\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-(4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=-5\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}.$$

Если все элементы одной строки (столбца) матрицы (определителя) умножаются на одно и то же число λ, то говорят, что на число λ умножается строка (столбец) матрицы (определителя). *Транспонированием* матрицы называется операция, состоящая в замене строк матрицы столбцами, а столбцов — строками с теми же номерами. Матрицу, транспонированную к матрице B, обозначают B^{τ}. Если, например, матрица B определяется формулой (2.8), то $B^{\tau}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix}$. Если $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}$ и $A'=\begin{pmatrix}\alpha_1' & \alpha_2'\\ \beta_1' & \beta_2'\end{pmatrix}$ — матрицы второго порядка, одна из которых числовая (целиком составлена из чисел), то *произведением* AA' называется матрица

$$AA'=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_1'+\alpha_2\beta_1' & \alpha_1\alpha_2'+\alpha_2\beta_2'\\ \beta_1\alpha_1'+\beta_2\beta_1' & \beta_1\alpha_2'+\beta_2\beta_2'\end{pmatrix}.$$

Произведением BB' матриц B и B' третьего порядка

$$B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix},\quad B'=\begin{pmatrix}\alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3'\\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3'\\ \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3'\end{pmatrix}$$

при условии, что одна из них числовая, называется матрица

$$BB'=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_1'+\alpha_2\beta_1'+\alpha_3\gamma_1' & \alpha_1\alpha_2'+\alpha_2\beta_2'+\alpha_3\gamma_2' & \alpha_1\alpha_3'+\alpha_2\beta_3'+\alpha_3\gamma_3'\\ \beta_1\alpha_1'+\beta_2\beta_1'+\beta_3\gamma_1' & \beta_1\alpha_2'+\beta_2\beta_2'+\beta_3\gamma_2' & \beta_1\alpha_3'+\beta_2\beta_3'+\beta_3\gamma_3'\\ \gamma_1\alpha_1'+\gamma_2\beta_1'+\gamma_3\gamma_1' & \gamma_1\alpha_2'+\gamma_2\beta_2'+\gamma_3\gamma_2' & \gamma_1\alpha_3'+\gamma_2\beta_3'+\gamma_3\gamma_3'\end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Например, если $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $A'=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, то

$$AA'=\begin{pmatrix}0\cdot1+1\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot1\\ 2\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot0+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix},$$

$$A'A=\begin{pmatrix}1\cdot0+0\cdot2 & 1\cdot1+0\cdot1\\ 1\cdot0+1\cdot2 & 1\cdot1+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Единичной матрицей E называется числовая матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, а недиагональные — нулю. Единичная матрица второго порядка имеет вид $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, третьего порядка — вид $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Если S и E — матрицы одного порядка, E — единичная матрица, то $SE=ES=S$. Числовые матрицы одного порядка X и Y называют *обратными* друг к другу и обозначают $Y=X^{-1}$, $X=Y^{-1}$, если $XY=YX=E$.

Приведем свойства определителей.

1°. $\det S=\det S^{\tau}$.

□ Если $S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}$, то $S^{\tau}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix}$,

$$\det S=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1,$$

$$\det S^{\tau}=\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2=\det S.$$

Если $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$, то $S^{\tau} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$ и

$$\det S = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 =$$

$$= \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \det S^{\tau}. \blacksquare$$

2°. *Если две строки определителя поменять местами, то знак определителя изменится.*

□ Если $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$, $S' = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$, то

$$\det S = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \quad \det S' = \beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1 = -(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = -\det S.$$

Если $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$, $S' = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$, то

$$\det S' = \beta_1(\alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2) - \beta_2(\alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1) + \beta_3(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1) =$$

$$= -\alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \alpha_2(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) - \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = -\det S.$$

Аналогично можно проверить, что

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}. \blacksquare$$

3°. *Если две строки определителя одинаковы, то определитель равен нулю (нулевому вектору).*

□ Действительно, если две одинаковые строки поменять местами, то определитель не изменится. С другой стороны, согласно свойству 2° определитель изменит знак. Но единственное число (вектор), которое (который) не изменяется при изменении знака, — это нуль (нулевой вектор). ■

4°. *Если два столбца определителя поменять местами, то определитель изменит знак. Определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю (нулевому вектору).*

□ Это свойство следует из свойств 1° — 3°. ■

5°. *Для произвольных чисел* λ *и* μ *справедливо равенство*

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1+\mu\alpha_1' & \lambda\alpha_2+\mu\alpha_2' & \lambda\alpha_3+\mu\alpha_3' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

если все три определителя имеют смысл, т.е. если одновременно все α_1 *и* α_1', α_2 *и* α_2', α_3 *и* α_3' *— или числа, или векторы.*

□ Определитель, стоящий в левой части равенства, равен

$$(\lambda\alpha_1+\mu\alpha_1')\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - (\lambda\alpha_2+\mu\alpha_2')\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + (\lambda\alpha_3+\mu\alpha_3')\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda\left(\alpha_1\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}\right) +$$

$$+ \mu\left(\alpha_1'\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2'\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3'\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Аналогично, для определителя второго порядка имеем

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1+\mu\alpha_1' & \lambda\alpha_2+\mu\alpha_2' \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Свойство 5° называется **свойством линейности определителя по первой строке**. С помощью свойства 2° можно легко проверить линейность определителя по любой строке. При $\mu = 0$ из свойства 5° следует, что при умножении строки определителя на число сам определитель умножается на это число:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 & \lambda\alpha_2 & \lambda\alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \lambda\beta_1 & \lambda\beta_2 & \lambda\beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \lambda\gamma_1 & \lambda\gamma_2 & \lambda\gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

6°. *Для любой числовой матрицы* $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$ *и любых чисел* λ *и* μ *выполняются следующие равенства*:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \lambda\beta_1 + \mu\gamma_1 & \alpha_2 + \lambda\beta_2 + \mu\gamma_2 & \alpha_3 + \lambda\beta_3 + \mu\gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 + \lambda\alpha_1 + \mu\gamma_1 & \beta_2 + \lambda\alpha_2 + \mu\gamma_2 & \beta_3 + \lambda\alpha_3 + \mu\gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 + \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 & \gamma_2 + \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 & \gamma_3 + \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.10)$$

□ Согласно свойству 5°, первый из определителей равен сумме

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

в которой второе и третье слагаемые равны нулю на основании свойства 3°. Тем самым первое из равенств (2.10) доказано. Остальные равенства следуют из первого равенства согласно свойству 2°. Про первый (третий, четвертый) определитель в (2.10) говорят, что он получен из $\det S$ прибавлением к первой (второй, третьей) строке линейной комбинации остальных строк. Свойство 6° означает, что при прибавлении к какой-либо строке определителя числовой матрицы линейной комбинации остальных строк определитель не изменяется. ■

Равенство, аналогичное (2.10), справедливо и для определителей числовых матриц второго порядка:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \lambda\beta_1 & \alpha_2 + \lambda\beta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 + \lambda\alpha_1 & \beta_2 + \lambda\alpha_2 \end{vmatrix}.$$

7°. *Определитель обладает свойством линейности по любому из своих столбцов. При умножении столбца определителя на число сам определитель умножается на это число. Если к столбцу определителя прибавить линейную комбинацию других столбцов, то определитель не изменится.*

□ В силу свойства 1° это свойство следует из свойств 5° и 6°. ■

8°. *Если S и S' — матрицы одинакового порядка, одна из которых числовая, то* $\det(SS') = \det S \cdot \det S'$.

□ Пусть $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$, $S' = \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' \\ \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix}$ — матрицы второго порядка. Тогда

$$\det SS' = (\alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\beta_1')(\beta_1\alpha_2' + \beta_2\beta_2') - (\alpha_1\alpha_2' + \alpha_2\beta_2')(\beta_1\alpha_1' + \beta_2\beta_1') =$$
$$= \alpha_1(\alpha_1'\beta_1\alpha_2' + \alpha_1'\beta_2\beta_2' - \alpha_2'\beta_1\alpha_1' - \alpha_2'\beta_2\beta_1') - \alpha_2(\beta_2'\beta_1\alpha_1' + \beta_2'\beta_2\beta_1' - \beta_1'\beta_1\alpha_2' - \beta_1'\beta_2\beta_2') =$$
$$= \alpha_1\beta_2(\alpha_1'\beta_2' - \alpha_2'\beta_1') - \alpha_2\beta_1(\alpha_1'\beta_2' - \alpha_2'\beta_1') = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\alpha_1'\beta_2' - \alpha_2'\beta_1') = \det S \cdot \det S'.$$

Пусть теперь

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad S' = \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' \end{pmatrix}$$

и для определенности S — числовая матрица. По формуле (2.9) и согласно свойству 5°, $\det(SS') = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c$, где

$$a = \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1\alpha_1' + \beta_2\beta_1' + \beta_3\gamma_1' & \beta_1\alpha_2' + \beta_2\beta_2' + \beta_3\gamma_2' & \beta_1\alpha_3' + \beta_2\beta_3' + \beta_3\gamma_3' \\ \gamma_1\alpha_1' + \gamma_2\beta_1' + \gamma_3\gamma_1' & \gamma_1\alpha_2' + \gamma_2\beta_2' + \gamma_3\gamma_2' & \gamma_1\alpha_3' + \gamma_2\beta_3' + \gamma_3\gamma_3' \end{vmatrix}.$$

Определители b и c получаются в результате замены в определителе a первой строки соответственно строками β_1', β_2', β_3' и γ_1', γ_2', γ_3'. Прибавляя в определителе a ко второй (третьей) строке первую строку, умноженную на $-\beta_1$ (соответственно на $-\gamma_1$), используя определение определителя третьего порядка и уже доказанное свойство 8° для определителей второго порядка, получаем

$$a = \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_2\beta_1' + \beta_3\gamma_1' & \beta_2\beta_2' + \beta_3\gamma_2' & \beta_2\beta_3' + \beta_3\gamma_3' \\ \gamma_2\beta_1' + \gamma_3\gamma_1' & \gamma_2\beta_2' + \gamma_3\gamma_2' & \gamma_2\beta_3' + \gamma_3\gamma_3' \end{vmatrix} =$$
$$= \alpha_1' \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_2' & \beta_3' \\ \gamma_2' & \gamma_3' \end{vmatrix} - \alpha_2' \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1' & \beta_3' \\ \gamma_1' & \gamma_3' \end{vmatrix} + \alpha_3' \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1' & \beta_2' \\ \gamma_1' & \gamma_2' \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \det S'.$$

Аналогично можно проверить, что

$$b = -\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} \det S', \quad c = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \det S',$$

поэтому

$$\det(SS') = \left(\alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}\right) \det S' =$$

$$= \det S \cdot \det S'. \blacksquare$$

Пример 1. Используя свойство 6°, вычислите определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}.$$

▲ Вычтем из второй строки первую, умноженную на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из третьей строки первую, умноженную на 3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-3) - 4 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = -3. \blacktriangledown$$

Отметим, что, используя свойство 1°, последние вычисления можно упростить:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3) \cdot (-11) - (-6) \cdot (-6) = -3.$$

Пример 2. Докажите, что если все элементы строки (столбца) определителя равны нулю (нулевому вектору), то определитель равен нулю (нулевому вектору).

▲ Если указанную строку (столбец) умножить на нуль, то определитель, очевидно, не изменится. С другой стороны, согласно свойствам 5° и 7°, определитель умножится на нуль, т.е. станет равным нулю (нулевому вектору). ▼

Если α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 — действительные числа, то имеет место тождество, связанное с тремя определителями:

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2 =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}\right)^2. \qquad (2.11)$$

□ Правая часть тождества (2.11) равна

$$(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)^2+(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)^2+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2=$$
$$=\alpha_2^2\beta_3^2+\alpha_3^2\beta_2^2+\alpha_1^2\beta_3^2+\alpha_3^2\beta_1^2+\alpha_1^2\beta_2^2+\alpha_2^2\beta_1^2-2(\alpha_2\beta_3\alpha_3\beta_2+\alpha_1\beta_3\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1).$$

Левая его часть равна

$$\alpha_1^2\beta_1^2+\alpha_2^2\beta_1^2+\alpha_3^2\beta_1^2+\alpha_1^2\beta_2^2+\alpha_2^2\beta_2^2+\alpha_3^2\beta_2^2+\alpha_1^2\beta_3^2+\alpha_2^2\beta_3^2+\alpha_3^2\beta_3^2-$$
$$-(\alpha_1^2\beta_1^2+\alpha_2^2\beta_2^2+\alpha_3^2\beta_3^2+2\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2+2\alpha_1\beta_1\alpha_3\beta_3+2\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3)=$$
$$=\alpha_2^2\beta_3^2+\alpha_3^2\beta_2^2+\alpha_1^2\beta_3^2+\alpha_3^2\beta_1^2+\alpha_1^2\beta_2^2+\alpha_2^2\beta_1^2-2(\alpha_2\beta_3\alpha_3\beta_2+\alpha_1\beta_3\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1),$$

т.е. равна правой. ■

Имеет место **лемма о трех определителях**: равенства

$$\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=0 \qquad (2.12)$$

выполняются тогда и только тогда, когда существуют числа λ и μ, не равные нулю одновременно, такие, что

$$\lambda\alpha_1+\mu\beta_1=0,\ \lambda\alpha_2+\mu\beta_2=0,\ \lambda\alpha_3+\mu\beta_3=0. \qquad (2.13)$$

При этом если $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2>0$, то $\mu\neq 0$; если $\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2>0$, то $\lambda\neq 0$.

□ Пусть выполняются соотношения (2.13) и пусть для определенности $\lambda\neq 0$. Тогда $\alpha_1=-\nu\beta_1$, $\alpha_2=-\nu\beta_2$, $\alpha_3=-\nu\beta_3$, где $\nu=\dfrac{\mu}{\lambda}$, и поэтому $\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2=-\nu\beta_2\beta_3+\nu\beta_3\beta_2=0$. Аналогично можно проверить, что $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=0$.

Обратно: если выполняются соотношения (2.12), то в силу тождества (2.11) $AB-C^2=0$, где

$$A=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2,\ B=\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2,\ C=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3.$$

Возможны следующие случаи:

а) $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Тогда соотношения (2.13) выполняются при $\lambda=1$, $\mu=0$.

б) $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2>0$. Рассмотрим квадратный трехчлен

$$p(t) = (t\alpha_1 - \beta_1)^2 + (t\alpha_2 - \beta_2)^2 + (t\alpha_3 - \beta_3)^2 =$$
$$= t^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) - 2t(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) + (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) =$$
$$= At^2 - 2Ct + B = A\left(t - \frac{C}{A}\right)^2 + B - \frac{C^2}{A} = A\left(t - \frac{C}{A}\right)^2.$$

При $t = \dfrac{C}{A}$ трехчлен $p(t)$ обращается в нуль, поэтому $\dfrac{C\alpha_1}{A} - \beta_1 = \dfrac{C\alpha_2}{A} - \beta_2 = \dfrac{C\alpha_3}{A} - \beta_3 = 0$, т.е. соотношения (2.13) выполняются при $\lambda = \dfrac{C}{A}$, $\mu = -1$. ■

Свойства алгебраических дополнений. Если в определителе выделить какой-нибудь элемент и вычеркнуть строку и столбец определителя, содержащие этот элемент, то оставшийся определитель называется *минором, дополнительным к выделенному элементу.* Дополнительный минор, умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров вычеркнутых строки и столбца, называется *алгебраическим дополнением к выделенному элементу.* Например, в определителе

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

алгебраическое дополнение к элементу β_3 есть $(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}$, поскольку элемент β_3 расположен во второй строке и в третьем столбце.

Пусть

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

— произвольная числовая матрица; A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 — алгебраические дополнения, соответственно, к элементам α_1, α_2, α_3, β_1,

β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 в определителе $\det S$. Рассмотрим матрицу

$$S' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

получающуюся из S следующим образом: в матрице S каждый элемент заменяется его алгебраическим дополнением, а получившаяся матрица затем транспонируется. Докажем, что

$$SS' = S'S = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}, \text{ где } \Delta = \det S.$$

По определению произведения матриц для этого необходимо и достаточно проверить выполнение следующих равенств:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \Delta, \quad \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 = 0,$$
$$\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3 = 0; \tag{2.16}$$

$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3 = 0, \quad \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3 = \Delta,$$
$$\gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \gamma_3 B_3 = 0; \tag{2.17}$$

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 = 0, \quad \beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \beta_3 C_3 = 0,$$
$$\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \gamma_3 C_3 = \Delta; \tag{2.18}$$

$$\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1 = \Delta, \quad \alpha_2 A_1 + \beta_2 B_1 + \gamma_2 C_1 = 0,$$
$$\alpha_3 A_1 + \beta_3 B_1 + \gamma_3 C_1 = 0; \tag{2.19}$$

$$\alpha_1 A_2 + \beta_1 B_2 + \gamma_1 C_2 = 0, \quad \alpha_2 A_2 + \beta_2 B_2 + \gamma_2 C_2 = \Delta,$$
$$\alpha_3 A_2 + \beta_3 B_2 + \gamma_3 C_2 = 0; \tag{2.20}$$

$$\alpha_1 A_3 + \beta_1 B_3 + \gamma_1 C_3 = 0, \quad \alpha_2 A_3 + \beta_2 B_3 + \gamma_2 C_3 = 0,$$
$$\alpha_3 A_3 + \beta_3 B_3 + \gamma_3 C_3 = \Delta. \tag{2.21}$$

□ Равенства (2.16) — (2.21) доказываются одинаково. Проверим, например, первые два из равенств (2.16):

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \Delta;$$

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \blacksquare$$

Из доказанного утверждения следует, что для всякой числовой матрицы S вида (2.14), определитель которой $\Delta = \det S$ не равен нулю, существует обратная к ней матрица S^{-1}, причем

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} A_1/\Delta & B_1/\Delta & C_1/\Delta \\ A_2/\Delta & B_2/\Delta & C_2/\Delta \\ A_3/\Delta & B_3/\Delta & C_3/\Delta \end{pmatrix} \text{ и } \det S^{-1} = 1/\Delta.$$

Если $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ — матрица второго порядка, причем $\Delta = \det S = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, то обратная матрица S^{-1} определяется формулой

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_2/\Delta & -\alpha_2/\Delta \\ -\beta_1/\Delta & \alpha_1/\Delta \end{pmatrix}, \quad \det S^{-1} = 1/\Delta.$$

Системы линейных уравнений. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = m, \quad \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = n,$$
$$\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z = p, \tag{2.22}$$

где α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 — заданные числа; m, n и p — либо заданные числа, либо векторы; x, y, z — переменные (числовые, если m, n, p — числа, и векторные, если m, n, p — векторы). Матрица $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$ называется *матрицей системы* (2.22). Обозначим через S' матрицу из алгебраических дополнений (см. (2.14), (2.15)) к элементам матрицы S. Положим $\Delta = \det S$.

Пусть $(x; y; z)$ — решение системы (2.22). Сложив первое из уравнений этой системы, умноженное на A_1, со вторым уравнением, умноженным на B_1, и с третьим уравнением, умноженным на C_1, получим в силу (2.19)

$$x\Delta = mA_1 + nB_1 + pC_1 = \begin{vmatrix} m & \alpha_2 & \alpha_3 \\ n & \beta_2 & \beta_3 \\ p & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \Delta_x \tag{2.23}$$

(последнее из равенств (2.23) является определением Δ_x).

Умножая первое уравнение системы (2.22) на A_2, второе — на B_2, третье — на C_2 и складывая получившиеся уравнения, на основании (2.20) получим

$$y\Delta = mA_2 + nB_2 + pC_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & m & \alpha_3 \\ \beta_1 & n & \beta_3 \\ \gamma_1 & p & \gamma_3 \end{vmatrix} = \Delta_y. \qquad (2.24)$$

Аналогично имеем

$$z\Delta = mA_3 + nB_3 + pC_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & m \\ \beta_1 & \beta_2 & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & p \end{vmatrix} = \Delta_z. \qquad (2.25)$$

Теорема 1 (правило Крамера). *Если определитель Δ матрицы S системы уравнений* (2.22) *не равен нулю, то эта система имеет единственное решение* $(x; y; z)$, *определяемое следующими формулами*:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \qquad (2.26)$$

□ Единственность решения следует из того, что, как показано выше, всякое решение $(x; y; z)$ системы (2.22) удовлетворяет равенствам (2.23) — (2.25) и поэтому имеет вид (2.26). Остается проверить, что формулы (2.26) действительно определяют решение системы (2.22). Подставляя выражения (2.26) в левую часть первого уравнения системы (2.22), в силу равенств (2.16) — (2.18) имеем

$$\alpha_1(\Delta_x/\Delta)+\alpha_2(\Delta_y/\Delta)+\alpha_3(\Delta_z/\Delta) =$$

$$=(1/\Delta)(\alpha_1 mA_1+\alpha_1 nB_1+\alpha_1 pC_1+\alpha_2 mA_2+\alpha_2 nB_2+\alpha_2 pC_2+\alpha_3 mA_3+\alpha_3 nB_3+\alpha_3 pC_3)=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\{(\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2+\alpha_3 A_3)m+(\alpha_1 B_1+\alpha_2 B_2+\alpha_3 B_3)n+(\alpha_1 C_1+\alpha_2 C_2+\alpha_3 C_3)p\}=m.$$

Таким образом, x, y и z, определяемые формулами (2.26), удовлетворяют первому из уравнений системы (2.22). Аналогично можно проверить, что x, y и z удовлетворяют также второму и третьему уравнениям (выполните эту проверку в качестве упражнения). ■

Доказанная теорема означает, что если m, n, p выражаются через x, y, z с помощью элементов матрицы S (2.14) по формулам (2.22), то x, y, z выражаются через m, n, p с помощью элементов матрицы S' (2.15) по формулам (2.26) (см. (2.23) — (2.25)).

Система уравнений (2.22) называется *однородной*, если $m = n = p = 0$. Если $\Delta \neq 0$, то однородная система (2.22) имеет единственное решение $x = y = z = 0$, которое называется *тривиальным*. Любое решение $(x;\ y;\ z)$ однородной системы, для которого $x^2 + y^2 + z^2 > 0$, называется *нетривиальным*.

Теорема 2 (о существовании нетривиального решения у однородной системы уравнений). *Система линейных уравнений*

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0,\ \ \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = 0,\ \ \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z = 0 \qquad (2.27)$$

имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$.

□ Если нетривиальное решение системы (2.27) существует, то $\Delta = 0$, в противном случае система (2.27) имела бы единственное решение — тривиальное (правило Крамера).

Обратно: пусть $\Delta = 0$. Тогда если A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 — алгебраические дополнения соответственно к элементам α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 матрицы S системы (2.27), то в силу равенств (2.16) — (2.18) наборы $(A_1;\ A_2;\ A_3)$, $(B_1;\ B_2;\ B_3)$, $(C_1;\ C_2;\ C_3)$ — решения системы (2.27). Если хотя бы одно из этих решений нетривиально, то теорема доказана.

Рассмотрим случай $A_1 = A_2 = A_3 = B_1 = B_2 = B_3 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Если все элементы матрицы S равны нулю, то система (2.27) имеет нетривиальное решение (ей удовлетворяют любые числа x, y, z). Если же не все элементы матрицы S равны нулю, то, поменяв (если это необходимо) уравнения системы (2.27) местами, можно без ограничения общности считать, что $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$. Так как

$$B_1 = -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,\quad B_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,\quad B_3 = -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0,$$

то по лемме о трех определителях существует такое число $\nu \neq 0$, что $\gamma_1 = \nu\alpha_1$, $\gamma_2 = \nu\alpha_2$, $\gamma_3 = \nu\alpha_3$, т.е. третье уравнение системы получается из первого умножением обеих его частей на число ν и, следовательно, является следствием первого уравнения. Аналогично, из равенств $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ следует, что второе из уравнений системы (2.27) является следствием первого. Значит, в рассматриваемом случае система (2.27) эквивалентна своему первому уравнению (точнее, тому из своих уравнений, у которого не все коэффициенты равны нулю). Осталось проверить, что урав-

нение $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$ имеет нетривиальное решение. А это очевидно: если $\alpha_1 = 0$, то (1; 0; 0) — решение данного уравнения; если же $\alpha_1 \neq 0$, то решением данного уравнения является $(\alpha_2 / \alpha_1;\ -1;\ 0)$. ■

§5. Признак компланарности векторов. Базис на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по базису. Необходимые и достаточные условия коллинеарности и компланарности векторов. Векторное параметрическое уравнение плоскости

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — неколлинеарные векторы. Отложим их от одной точки: $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ (рис. 2.16). Обозначим через $\mathcal{P}$ плоскость, определяемую точками O, A, B. Любой вектор $\boldsymbol{c}$, компланарный векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, по определению параллелен плоскости $\mathcal{P}$. Если построить вектор $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$, то точка C будет принадлежать плоскости $\mathcal{P}$. Проведем через точку C прямую l параллельно прямой (OB). Поскольку $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, прямые l и (OA) пересекутся в некоторой точке D. Векторы $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OA}$ коллинеарны, причем $\overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{0}$. Согласно признаку коллинеарности векторов найдется такое действительное число x, что $\overrightarrow{OD} = x\,\overrightarrow{OA}$. Аналогично, найдется такое число y, что $\overrightarrow{DC} = y\,\overrightarrow{OB}$. Поэтому $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB}$, т.е.

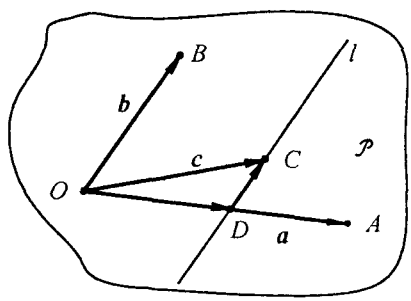

Рис. 2.16

$$\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}. \tag{2.28}$$

Упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a} \parallel \mathcal{P}$ и $\boldsymbol{b} \parallel \mathcal{P}$ называется *базисом в плоскости* $\mathcal{P}$ (обозначение: $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$). Всякий вектор $\boldsymbol{c}$, компланарный векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, образующим базис, можно представить в виде (2.28). Числа x и y называются *координатами вектора* $\boldsymbol{c}$, *в базисе* $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, а само равенство (2.28) — *разложением вектора* $\boldsymbol{c}$ *по базису* $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$. Тот