нение $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$ имеет нетривиальное решение. А это очевидно: если $\alpha_1 = 0$, то (1; 0; 0) — решение данного уравнения; если же $\alpha_1 \neq 0$, то решением данного уравнения является $(\alpha_2 / \alpha_1;\ -1;\ 0)$. ■

§5. Признак компланарности векторов. Базис на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по базису. Необходимые и достаточные условия коллинеарности и компланарности векторов. Векторное параметрическое уравнение плоскости

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — неколлинеарные векторы. Отложим их от одной точки: $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ (рис. 2.16). Обозначим через $\mathcal{P}$ плоскость, определяемую точками O, A, B. Любой вектор $\boldsymbol{c}$, компланарный векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, по определению параллелен плоскости $\mathcal{P}$. Если построить вектор $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$, то точка C будет принадлежать плоскости $\mathcal{P}$. Проведем через точку C прямую l параллельно прямой (OB). Поскольку $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, прямые l и (OA) пересекутся в некоторой точке D. Векторы $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OA}$ коллинеарны, причем $\overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{0}$. Согласно признаку коллинеарности векторов найдется такое действительное число x, что $\overrightarrow{OD} = x\,\overrightarrow{OA}$. Аналогично, найдется такое число y, что $\overrightarrow{DC} = y\,\overrightarrow{OB}$. Поэтому $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB}$, т.е.

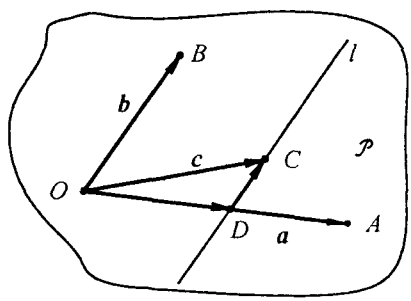

Рис. 2.16

$$\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}. \tag{2.28}$$

Упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a} \parallel \mathcal{P}$ и $\boldsymbol{b} \parallel \mathcal{P}$ называется *базисом в плоскости* $\mathcal{P}$ (обозначение: $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$). Всякий вектор $\boldsymbol{c}$, компланарный векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, образующим базис, можно представить в виде (2.28). Числа x и y называются *координатами вектора* $\boldsymbol{c}$, *в базисе* $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, а само равенство (2.28) — *разложением вектора* $\boldsymbol{c}$ *по базису* $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$. Тот

факт, что числа x и y являются координатами вектора $\boldsymbol{c}$ в базисе $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$, записывается так: $\boldsymbol{c} = (x; y)$.

Пример 1. Докажите, что разложение вектора $\boldsymbol{c}$ по базису $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ единственно.

□ Пусть $\boldsymbol{c} = x'\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b}$ — некоторое разложение вектора $\boldsymbol{c}$ по базису $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$, отличное от (2.28). Тогда в силу неколлинеарности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеем (см. пример 4 §3 этой главы) $x = x'$, $y = y'$. Получено противоречие. ■

Пример 2 (признак компланарности). Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — три вектора пространства, связанные соотношением (2.28), где x и y — некоторые действительные числа. Докажите, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны.

□ Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, т.е. параллельны некоторой прямой l, то этой прямой параллельны векторы $x\boldsymbol{a}$, $y\boldsymbol{b}$, а также и вектор $\boldsymbol{c}$, являющийся суммой $x\boldsymbol{a}$ и $y\boldsymbol{b}$. Значит, векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ параллельны любой плоскости, содержащей прямую l.

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то отложим их от некоторой точки O (рис. 2.16): $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$. Обозначим через $\mathcal{P}$ плоскость (OAB). Возьмем на прямой (OA) точку D так, чтобы $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA}$. Отложим от точки D направленный отрезок $\overrightarrow{DC} = y\overrightarrow{OB}$, который, будучи параллелен прямой (OB), параллелен и плоскости $\mathcal{P}$. Его начало D лежит в плоскости $\mathcal{P}$, значит, и конец C также расположен в плоскости $\mathcal{P}$. Таким образом, начало и конец направленного отрезка $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ лежат в плоскости $\mathcal{P}$. Это значит, что изображаемый им вектор $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$, т.е. вектор $\boldsymbol{c}$, параллелен плоскости $\mathcal{P}$, а следовательно, компланарен векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. ■

Пример 3. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не компланарны. Докажите, что

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z = 0. \qquad (2.29)$$

□ Если хотя бы одно из чисел в равенстве $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \vec{0}$, например z, не равно нулю, то это равенство эквивалентно равенству

$c = x'a + y'b$, где $x' = -\frac{x}{z}$, $y' = -\frac{y}{z}$. По признаку компланарности (см. пример 2) вектор c компланарен векторам a и b, т.е. получено противоречие. Следовательно, $x = y = z = 0$. Обратно: если $x = y = z = 0$, то равенство $xa + yb + zc = \vec{0}$ очевидно. ■

Пример 4. Векторы a, b и c не компланарны. Докажите, что равенство

$$m_1a + n_1b + k_1c = m_2a + n_2b + k_2c \tag{2.30}$$

эквивалентно системе равенств

$$m_1 = m_2, \quad n_1 = n_2, \quad k_1 = k_2. \tag{2.31}$$

□ Для доказательства достаточно переписать (2.30) в виде

$$(m_1 - m_2)a + (n_1 - n_2)b + (k_1 - k_2)c = \vec{0}$$

и воспользоваться результатом примера 3. ■

Пример 5. Докажите, что если векторы $a \neq \vec{0}$ и b коллинеарны, то векторы a, b и c (c — любой вектор) компланарны.

□ Если векторы a и c коллинеарны, то все три вектора a, b и c параллельны одной и той же прямой, тем более одной и той же содержащей эту прямую плоскости. Если векторы a и c не коллинеарны, то они образуют базис в некоторой плоскости $\mathcal{P}$. Векторы $a \neq \vec{0}$ и b коллинеарны, поэтому найдется такое число k, что $b = ka = ka + 0c$. Согласно признаку компланарности (см. пример 2), векторы a, b, c компланарны (параллельны плоскости $\mathcal{P}$). ■

Пример 6. Докажите, что если векторы a, b, c не компланарны, то: а) ни один из них не является нулевым; б) векторы a и b не коллинеарны.

□ а) Если бы, например, $a = \vec{0}$, то имело бы место равенство $1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c = \vec{0}$, что противоречит (2.29).

б) Если бы векторы a и b были коллинеарны и $a \neq \vec{0}$, то некомпланарность векторов a, b, c противоречила бы результату примера 5. Если бы $a = \vec{0}$, то имело бы место противоречие с доказанной частью а) утверждения этого примера. ■

Пример 7. В правильной усеченной шестиугольной пирамиде $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (см. рис. 2.7) точки O и O_1 — центры оснований соответственно $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Разложите: а) вектор $\overrightarrow{AD}$ по базису $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\}$; б) вектор $\overrightarrow{OO_1}$ по базису $\{\overrightarrow{EE_1}, \overrightarrow{BB_1}\}$.

▲ а) $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$.

б) Точки O и O_1 — середины отрезков $[BE]$ и $[B_1E_1]$. Поэтому (см. пример 5 §2 этой главы) $2\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{EE_1} + \overrightarrow{BB_1}$, т.е. $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EE_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$. ▼

Пример 8. В параллелограмме $ABCD$ $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AD}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$, E — середина стороны $[CD]$. Разложите вектор $\overrightarrow{BE}$ по базису $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$. Представьте тремя способами вектор $\overrightarrow{BE}$ в виде

$$\overrightarrow{BE} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}. \tag{2.32}$$

▲ Имеем $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Поэтому

$$\overrightarrow{BE} = (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{a} = -\frac{3}{2}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}.$$

Таким образом, вектор $\overrightarrow{BE}$ уже представлен двумя способами в виде (2.32): $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{a} + 1\cdot\boldsymbol{b} + 0\cdot\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{BE} = -\frac{3}{2}\boldsymbol{a} + 0\cdot\boldsymbol{b} + 1\cdot\boldsymbol{c}$. Если t — произвольное действительное число, то $t(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = \vec{0}$. Следовательно, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BE} + \vec{0} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + t(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = (t - \frac{1}{2})\boldsymbol{a} + (1 + t)\boldsymbol{b} - t\boldsymbol{c}$. При $t = 0$ получаем первое представление, при $t = -1$ — второе. Взяв $t = 1$, получаем третье представление: $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$. ▼

Пусть $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ — некоторые векторы, α_1, α_2, ..., α_n — действительные числа. Вектор $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n$ называется *линейной комбинацией векторов* $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ (*с коэффициентами* α_1, α_2, ..., α_n).

Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то линейная комбинация называется *тривиальной*, в противном случае — *нетривиальной*. Представление вектора $\boldsymbol{a}$ в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называется *разложением вектора* $\boldsymbol{a}$ *по векторам* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Как следует из результата примера 8, разложение четвертого вектора по трем компланарным векторам в общем случае не единственно. В примере 2 показано, что никакой из трех некомпланарных векторов нельзя разложить по двум остальным. Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0. \qquad (2.33)$$

Результаты примера 3 из §3 и примера 3 этого параграфа позволяют сделать вывод, что неколлинеарные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно независимы, некомпланарные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ также линейно независимы. Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если они не являются линейно независимыми, т.е. существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n = \vec{0},$$
$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 > 0. \qquad (2.34)$$

Пример 9. Докажите, что: а) два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны; б) три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

□ Достаточно проверить, что коллинеарные (компланарные) векторы линейно зависимы.

а) Пусть $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. Если $\boldsymbol{a} = \vec{0}$, то $1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \boldsymbol{b} = \vec{0}$ и коллинеарность $\vec{0}$ и $\boldsymbol{b}$ влечет линейную зависимость $\vec{0}$ и $\boldsymbol{b}$. Если $\boldsymbol{a} \neq \vec{0}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то согласно признаку коллинеарности существует такое число k, что $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$, т.е. $1 \cdot \boldsymbol{b} + (-k) \cdot \boldsymbol{a} = \vec{0}$, $1^2 + (-k)^2 > 0$, и линейная зависимость $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ очевидна.

б) Пусть векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то, по доказанному, $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \vec{0}$ при некоторых таких α и β, что $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Но тогда $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c} = \vec{0}$, причем $\alpha^2 + \beta^2 + 0^2 > 0$, т.е. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ линейно зависимы. Пусть теперь компланарные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ таковы, что $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны. Тогда (см. формулу (2.28)) при

некоторых x и y выполняется равенство $(-1)\boldsymbol{c}+x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\vec{0}$, причем $(-1)^2+x^2+y^2>0$, т.е. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ линейно зависимы. ■

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов. Базис, образованный векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, обозначается $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$.

Пример 10 (разложение по базису в пространстве). Пусть $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ — базис, $\boldsymbol{d}$ — произвольный вектор пространства. Докажите, что вектор $\boldsymbol{d}$ можно, и притом единственным образом, разложить по векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

□ Отложим векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ от некоторой точки O: $\boldsymbol{a}=\vec{OA}$, $\boldsymbol{b}=\vec{OB}$, $\boldsymbol{c}=\vec{OC}$, $\boldsymbol{d}=\vec{OD}$. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны (см. пример 6). Обозначим через $\mathcal{P}$ плоскость (OAB). Проведем через точку D прямую l, параллельную (OC) (вектор $\boldsymbol{c}=\vec{OC}\neq\vec{0}$ (см. пример 6), поэтому $O\neq C$ и прямая l определена однозначно). Вектор $\boldsymbol{c}=\vec{OC}$ не параллелен плоскости $\mathcal{P}$, поэтому прямая l пересечет плоскость $\mathcal{P}$ в некоторой точке E (рис. 2.17). Векторы $\vec{ED}$ и $\vec{OC}\neq\vec{0}$ коллинеарны. Согласно признаку коллинеарности, существует такое действительное число z, что $\vec{ED}=z\vec{OC}=z\boldsymbol{c}$. Направленные отрезки $\vec{OE}$, $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ компланарны, причем $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ — базис в содержащей их плоскости $\mathcal{P}$. Следовательно, вектор $\vec{OE}$ раскладывается по базису $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$: $\vec{OE}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

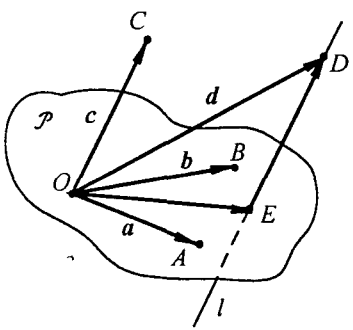

Рис. 2.17

Окончательно имеем $\boldsymbol{d}=\vec{OD}=\vec{OE}+\vec{ED}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$.

Единственность разложения вектора $\boldsymbol{d}$ по базису $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ доказана в примере 4: если также $\boldsymbol{d}=x'\boldsymbol{a}+y'\boldsymbol{b}+z'\boldsymbol{c}$, то из некомпланарности векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ следует $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$. ■

Коэффициенты разложения вектора $\boldsymbol{d}$ по базису $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ называются *координатами вектора* $\boldsymbol{d}$ *в базисе* $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$. Тот факт, что числа x, y, z являются координатами вектора $\boldsymbol{d}$ в базисе, записывается так: $\boldsymbol{d}=(x;\,y;\,z)$.

Приведем свойства координат вектора. Пусть $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ — базис, $\boldsymbol{d}=(x;\,y;\,z)$ и $\boldsymbol{e}=(x';\,y';\,z')$ — произвольные векторы, λ — действительное число. Тогда:

1°. $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{e} \Leftrightarrow x=x',\ y=y',\ z=z'$, т.е. *два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их одноименные координаты.*

2°. $\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}=(x+x';\ y+y';\ z+z')$, *т.е. координаты суммы двух векторов равны суммам соответствующих координат этих векторов.*

3°. $\lambda\boldsymbol{d}=(\lambda x;\ \lambda y;\ \lambda z)$, *т.е. при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.*

□ Свойство 1° доказано в примере 4. Свойства 2° и 3° являются частными случаями следующего свойства линейности координат: *для любых чисел* α *и* β

$$\alpha\boldsymbol{d}+\beta\boldsymbol{e}=(\alpha x+\beta x';\ \alpha y+\beta y';\ \alpha z+\beta z').$$

Действительно,

$$\alpha\boldsymbol{d}+\beta\boldsymbol{e}=\alpha(x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c})+\beta(x'\boldsymbol{a}+y'\boldsymbol{b}+z'\boldsymbol{c})=$$
$$=(\alpha x+\beta x')\boldsymbol{a}+(\alpha y+\beta y')\boldsymbol{b}+(\alpha z+\beta z')\boldsymbol{c}=$$
$$=(\alpha x+\beta x';\ \alpha y+\beta y';\ \alpha z+\beta z'). \ ■$$

Аналогичными свойствами обладают координаты векторов на плоскости. Если $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ — базис в плоскости $\mathcal{P}$, $\boldsymbol{d}=(x;\,y)$ и $\boldsymbol{e}=(x';\,y')$ — произвольные векторы, параллельные плоскости $\mathcal{P}$, α и β — действительные числа, то:

1°. $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{e} \Leftrightarrow x=x',\ y=y'$;

2°. $\alpha\boldsymbol{d}+\beta\boldsymbol{e}=(\alpha x+\beta x';\ \alpha y+\beta y')$.

Пример 11. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (см. рис. 2.6). Разложите вектор $\overrightarrow{AA_1}$ по базису $\{\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{CB_1},\overrightarrow{BA_1}\}$.

▲ Имеем $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC_1}$. Складывая эти равенства, получаем

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{AC_1}.$$

Так как $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\vec{0}$ (цикл $ABCA$), а $\vec{AA_1}=\vec{BB_1}=\vec{CC_1}$, то $\vec{AA_1}=\frac{1}{3}\vec{AC_1}+\frac{1}{3}\vec{CB_1}+\frac{1}{3}\vec{BA_1}$. ▼

Пример 12. В тетраэдре $ABCD$ точки K и L — соответственно середины ребер $[AC]$ и $[BD]$, O — точка пересечения медиан грани ACD (рис. 2.18). Разложите:

а) вектор $\vec{BO}$ по базису $\{\vec{BA},\vec{BC},\vec{BD}\}$;

б) вектор $\vec{KL}$ по каждому из базисов $\{\vec{AC},\vec{AB},\vec{AD}\}$, $\{\vec{BO},\vec{OD},\vec{AC}\}$ и $\{\vec{DA},\vec{BC},\vec{BO}\}$.

▲ а) Складывая равенства $\vec{BO}+\vec{OA}=\vec{BA}$, $\vec{BO}+\vec{OC}=\vec{BC}$, $\vec{BO}+\vec{OD}=$ $=\vec{BD}$, получаем $3\vec{BO}+(\vec{OA}+\vec{OC}+\vec{OD})=\vec{BA}+\vec{BC}+\vec{BD}$. На основании результата примера 3 §2 этой главы $\vec{OA}+\vec{OC}+\vec{OD}=\vec{0}$, т.е.

$$\vec{BO}=\frac{1}{3}\vec{BA}+\frac{1}{3}\vec{BC}+\frac{1}{3}\vec{BD}.$$

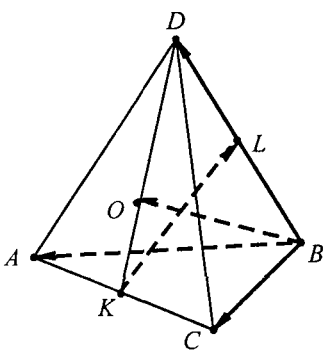

Рис. 2.18

б) В данном случае $\vec{AL}$ — вектор медианы треугольника ADB. Поэтому $\vec{AL}=\frac{1}{2}(\vec{AD}+\vec{AB})$. Следовательно,

$$\vec{KL}=\vec{AL}-\vec{AK}=\frac{1}{2}(\vec{AD}+\vec{AB})-\frac{1}{2}\vec{AC}=$$

$=-\frac{1}{2}\vec{AC}+\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AD}$. Приведем еще один способ разложения $\vec{KL}$ по базису $\{\vec{AC},\vec{AB},\vec{AD}\}$. На основании формулы для средней линии пространственного четырехугольника (см. пример 5 §2 этой главы) имеем $\vec{KL}=\frac{1}{2}(\vec{AD}+\vec{CB})$, а так как $\vec{CB}=\vec{AB}-\vec{AC}$, то $\vec{KL}=-\frac{1}{2}\vec{AC}+$ $+\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AD}$. Вектор $\vec{KL}$ является вектором медианы треугольника KDB.

Значит, $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KB})$. Согласно свойству точки пересечения медиан, $\overrightarrow{KO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{KD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OD}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KB}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}\overrightarrow{OD} + (\overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OB})) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Наконец, как отмечалось выше,

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + 0 \cdot \overrightarrow{BO}. \blacktriangledown$$

Пример 13. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания $ABCD$. Разложите вектор $\overrightarrow{SO}$ несколькими различными способами по векторам $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$.

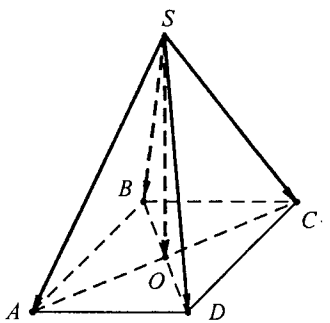

Рис. 2.19

▲ Имеем

$$\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}),$$

$$\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}) \text{ (рис. 2.19).}$$

Складывая эти два различных разложения, получаем третье:

$$\overrightarrow{SO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}). \blacktriangledown$$

Пример 14. Укажите несколько разложений вектора $\overrightarrow{KL}$ (см. пример 12) по векторам $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$.

▲ Так как $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB}$, то

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}) = 0 \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Далее, имеем $\vec{KL} = \frac{1}{2}\vec{OB} + \vec{OD}$ (см. пример 12). Поскольку $\vec{OD} = \vec{OB} - \vec{DB}$, получаем второе разложение:

$$\vec{KL} = \frac{3}{2}\vec{OB} - \vec{DB} + 0 \cdot \vec{CB} + 0 \cdot \vec{AB}.$$

Если теперь воспользуемся полученным в примере 12 равенством

$$-\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{DB} + \frac{1}{3}\vec{CB} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{0},$$

то при любом $t \in R$ получим:

$$\vec{KL} = \frac{3}{2}\vec{OB} + t(-\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{DB} + \frac{1}{3}\vec{CB} + \frac{1}{3}\vec{AB}) - \vec{DB} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} - t\right)\vec{OB} + \left(\frac{1}{3}t - 1\right)\vec{DB} + \frac{1}{3}t\,\vec{CB} + \frac{1}{3}t\,\vec{AB}.$$

При $t = \frac{3}{2}(t = 0)$ получаем первое (второе) разложение. ▼

Пример 15*. На стороне $[AB]$ параллелограмма $ABCD$ расположена точка K, на продолжении стороны $[CD]$ за точку D — точка L. Прямые (KD) и (BL) пересекаются в точке N, а прямые (LA) и (CK) — в точке M. Докажите, что отрезок $[MN]$ параллелен стороне $[AD]$.

▲ Обозначим $\boldsymbol{b} = \vec{AB}$, $\boldsymbol{d} = \vec{AD}$ (рис. 2.20). Векторы $\vec{AK}$ и $\vec{AB} \neq \vec{0}$ коллинеарны, поэтому существует определяемое положением точки $K \in [AB]$ такое число $\lambda \in [0, 1]$, что $\vec{AK} = \lambda\,\vec{AB} = \lambda\boldsymbol{b}$. Аналогично, в силу коллинеарности векторов $\vec{CL}$ и $\vec{CD}$ существует определяемое положением точки $L \in (CD)$ такое число $\mu > 1$, что $\vec{CL} = \mu\,\vec{CD} = -\mu\boldsymbol{b}$. Точка N лежит на прямой (KD). Поэтому (см. пример 6 §3 этой главы) существует (пока что неизвестное) такое число τ, что

$$\vec{AN} = (1-\tau)\,\vec{AK} + \tau\,\vec{AD} = (\lambda - \lambda\tau)\boldsymbol{b} + \tau\boldsymbol{d}.$$

Точка N лежит также и на прямой (BL). Значит, существует (также неизвестное)такое число ξ, что

$$\vec{AN} = (1-\xi)\,\vec{AB} + \xi\,\vec{AL} = (1-\xi)\boldsymbol{b} + \xi(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d} - \mu\boldsymbol{b}) = \xi\boldsymbol{d} + (1 - \xi\mu)\boldsymbol{b}.$$

Получены два разложения вектора $\overrightarrow{AN}$ по базису $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}\}$. Из единственности разложения вектора по базису получаем $\lambda-\lambda\tau=1-\xi\mu$, $\tau=\xi$. Следовательно, $\tau=\xi=\dfrac{1-\lambda}{\mu-\lambda}$ и $\overrightarrow{AN}=\dfrac{\lambda(\mu-1)\boldsymbol{b}+(1-\lambda)\boldsymbol{d}}{\mu-\lambda}$. Вектор $\overrightarrow{AM}$ находим из аналогичных

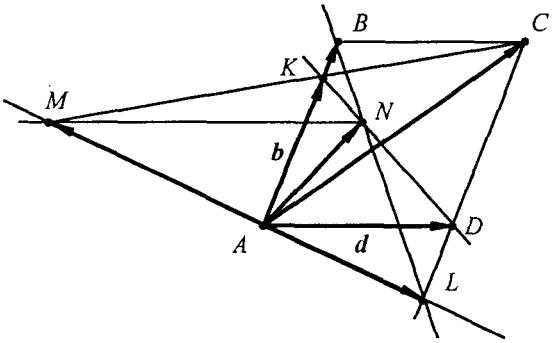

Рис. 2.20

соображений. Так как $M\in(AL)$, то найдется такое число t, что $\overrightarrow{AM}=-t\,\overrightarrow{AL}=-t(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CL})=-t((1-\mu)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d})$. Имеем $M\in(KC)$, поэтому

$$\overrightarrow{AM}=(1-\theta)\,\overrightarrow{AK}+\theta\,\overrightarrow{AC}=(1-\theta)\lambda\boldsymbol{b}+\theta(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d})=(\lambda+\theta-\lambda\theta)\boldsymbol{b}+\theta\boldsymbol{d}$$

при некотором $\theta\in R$. Сравнивая два получившихся разложения вектора $\overrightarrow{AM}$ по базису $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}\}$, приходим к системе уравнений $-t+t\mu=\lambda+\theta-\lambda\theta$, $-t=\theta$, из которой находим $t=-\theta=\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}$. Таким образом, $\overrightarrow{AM}=-\dfrac{\lambda(1-\mu)\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{d}}{\mu-\lambda}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\dfrac{\boldsymbol{d}}{\mu-\lambda}$, т.е. $\overrightarrow{MN}\parallel\boldsymbol{d}$. Следовательно, $(MN)\parallel(AD)$. ▼

Пример 16. На диагоналях $[AB_1]$ и $[CA_1]$ боковых граней треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены соответственно точки E и F так, что $(EF)\parallel(BC_1)$. Найдите отношение $|EF|:|BC_1|$.

▲ Векторы $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{CA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CB}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CC_1}$ не компланарны. Разложим все векторы по базису $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$. Имеем:

$$\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB_1}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\quad \overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = -\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

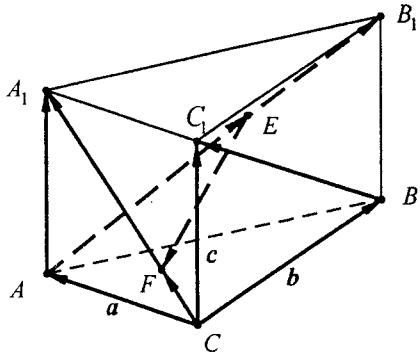

Рис. 2.21

Поскольку векторы $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{AB_1}$ коллинеарны, существует (неизвестное) такое число μ, что

$$\overrightarrow{AE} = \mu\,\overrightarrow{AB_1} = \mu(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).$$

Аналогично, существует такое ν, что $\overrightarrow{CF} = \nu\overrightarrow{CA_1} = \nu(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})$. По условию, $(EF)\|(BC_1)$. Значит, существует такое число λ, что

$$\overrightarrow{EF} = \lambda\,\overrightarrow{BC_1} = \lambda(-\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).$$

Рассмотрим цикл $CAEFC$ (рис. 2.21). По правилу цикла,

$$\vec{0} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \boldsymbol{a} + \mu(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) + \lambda(-\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) - \nu(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) =$$
$$= (1 - \mu - \nu)\boldsymbol{a} + (\mu - \lambda)\boldsymbol{b} + (\mu + \lambda - \nu)\boldsymbol{c}.$$

Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ не компланарны. Поэтому (см. (2.29)) $1 - \mu - \nu = 0$, $\mu - \lambda = 0$, $\mu + \lambda - \nu = 0$. Эта система имеет единственное решение: $\lambda = \mu = \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{2}{3}$. Следовательно, $|EF| : |BC_1| = |\lambda| = \frac{1}{3}$. ▼

Анализ приведенного решения показывает, что при решении задачи векторным методом чертеж необходим только для уяснения всей совокупности данных задачи и как инструмент, помогающий переформулировать задачу на язык векторной алгебры. При этом если некоторые условия задачи уже переведены с геометрического языка на аналитический без помощи рисунка, то нет необходимости геометрически идеально изображать эти условия на чертеже. Так, на рис. 2.21 прямые (EF) и (BC_1) изображены не параллельными. Это не повлияло на решение, поскольку факт коллинеарности векторов $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ был правильно записан аналитически. После того, как решение задачи найдено, можно без труда построить правильный чертеж, поскольку в процессе решения получено не только значение отношения $|EF| : |BC_1|$, но и положение точек F и E на соответствующих отрезках: $|CF| = \frac{2}{3}|CA_1|$, $|AE| = \frac{1}{3}|AB_1|$.

Пример 17. Точки M, N, Q лежат соответственно на ребрах $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$ тетраэдра $ABCD$. Плоскость (MNQ) пересекает прямую (AD) в точке P. Известно, что $|DN|=|CN|$, $|AM|=|BM|$, $|CQ|:|CB|=n$. Найдите отношение $|DP|:|DA|$.

▲ Выберем базис $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}\}$: $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{CA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CB}$, $\boldsymbol{d}=\overrightarrow{CD}$ (рис. 2.22). Разложим векторы по базису. Имеем:

$$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\boldsymbol{d},\ \overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CQ}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{d}+n\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{AC}=-\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+(1-n)\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})-(1-n)\boldsymbol{b}=$$

$$=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+(n-\frac{1}{2})\boldsymbol{b}.$$

Поскольку точка P лежит на прямой (AD), существует такое число λ, что $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DA}=\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})$, $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DP}=(1-\lambda)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})$. Точка P лежит также в плоскости (MNQ); следовательно, векторы $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{NQ}$, $\overrightarrow{MQ}$ компланарны. Векторы $\overrightarrow{NQ}$ и $\overrightarrow{MQ}$ не коллинеарны. Они образуют базис в плоскости (MNQ). Вектор $\overrightarrow{NP}$ раскладывается по этому базису с неизвестными коэффициентами μ и ν:

$$\overrightarrow{NP}=\mu\overrightarrow{NQ}+\nu\overrightarrow{MQ}=$$

$$=\mu(-\frac{1}{2}\boldsymbol{d}+n\boldsymbol{b})+\nu(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+(n-\frac{1}{2})\boldsymbol{b})=-\frac{\nu}{2}\boldsymbol{a}+(n(\mu+\nu)-\frac{\nu}{2})\boldsymbol{b}-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{d}.$$

Теперь можно воспользоваться правилом цикла. Из цикла $CNPAC$ имеем:

$$\overrightarrow{0}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{d}-\frac{\nu}{2}\boldsymbol{a}+(n(\mu+\nu)-\frac{\nu}{2})\boldsymbol{b}-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{d}+(1-\lambda)\boldsymbol{a}-(1-\lambda)\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}.$$

Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ не компланарны. Следовательно, $-\frac{\nu}{2}+(1-\lambda)-1=0$, $n(\mu+\nu)-\frac{\nu}{2}=0$, $\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}-(1-\lambda)=0$. Таким образом, $\nu=-2\lambda$, $\mu=\frac{\nu}{2n}-\nu=$

$=2\lambda-\frac{\lambda}{n}$, $\frac{1}{2}-\lambda+\frac{\lambda}{2n}-1+\lambda=0$, т.е. $\lambda=n$. Окончательно получаем $|DP|:|DA|=|\lambda|=n$. ▼

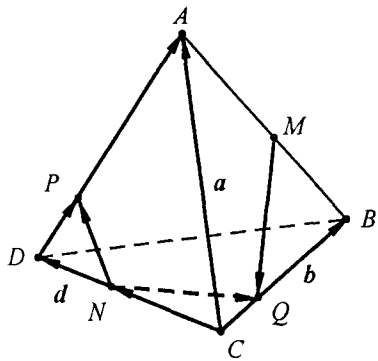

Рис. 2.22

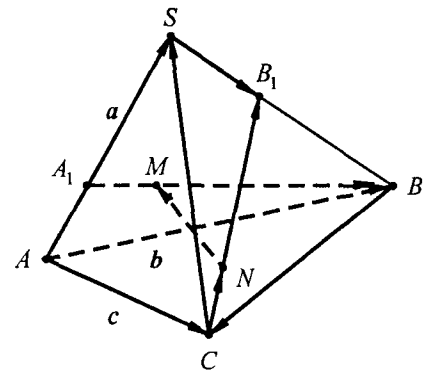

Рис. 2.23

Пример 18. На ребрах $[SA]$ и $[SB]$ тетраэдра $SABC$ выбраны соответственно точки A_1 и B_1 так, что $|SA_1|:|SA|=n$, $|SB_1|:|SB|=m$. Точки M и N лежат на отрезках $[A_1B]$ и $[CB_1]$ соответственно, причем $|CN|:|CB_1|=p$, а сам отрезок $[MN]$ параллелен плоскости (ASC). Найдите отношение $|BM|:|BA_1|$.

▲ Векторы $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AS}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$ (рис. 2.23) образуют базис. В этом базисе

$$\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{CS}+m\overrightarrow{SB}=m\overrightarrow{CB}+(1-m)\overrightarrow{CS}=m(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+(1-m)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=$$
$$=(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$$

(ср. с (2.5)). Поэтому $\overrightarrow{CN}=p\overrightarrow{CB_1}=p(1-m)\boldsymbol{a}+pm\boldsymbol{b}-p\boldsymbol{c}$. Вектор $\overrightarrow{NM}$ параллелен плоскости (ASC) и, следовательно, раскладывается по базису $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\}$ в этой плоскости: $\overrightarrow{NM}=y\boldsymbol{a}+z\boldsymbol{c}$ (числа y и z следует определить). Далее, $\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}=-\boldsymbol{b}+(1-n)\boldsymbol{a}$.

Векторы $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{BA_1}$ противоположно направлены, поэтому существует такое число $x < 0$, что $\overrightarrow{MB} = x\overrightarrow{BA_1} = -x\boldsymbol{b} + x(1-n)\boldsymbol{a}$. Наконец, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}$. Воспользуемся правилом цикла $CNMBC$:

$$\vec{0} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} =$$
$$= p(1-m)\boldsymbol{a} + pm\boldsymbol{b} - p\boldsymbol{c} + y\boldsymbol{a} + z\boldsymbol{c} - x\boldsymbol{b} + x(1-n)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}.$$

Приводя подобные члены, получаем

$$(p(1-m) + y + x(1-n))\boldsymbol{a} + (pm - x - 1)\boldsymbol{b} + (-p + z + 1)\boldsymbol{c} = \vec{0},$$

что эквивалентно системе уравнений

$$p(1-m) + y + x(1-n) = 0, \quad pm - x - 1 = 0, \quad -p + z + 1 = 0.$$

Из второго уравнения находим $x = pm - 1$. Следовательно, $|BM| : |BA_1| = |x| = |pm - 1| = 1 - pm$. ▼

Пример 19 (условие коллинеарности векторов). Пусть $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ — базис в пространстве. Найдите, при каком необходимом и достаточном условии векторы

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e}_1 + a_y\boldsymbol{e}_2 + a_z\boldsymbol{e}_3 \text{ и } \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{e}_1 + b_y\boldsymbol{e}_2 + b_z\boldsymbol{e}_3$$

коллинеарны.

▲ Два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны тогда и только тогда (см. пример 9), когда они линейно зависимы, т.е. когда существуют числа λ и μ, не равные нулю одновременно, такие, что $\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} = \vec{0}$. Согласно свойству линейности координат, это равенство эквивалентно системе соотношений $\lambda a_x + \mu b_x = 0$, $\lambda a_y + \mu b_y = 0$, $\lambda a_z + \mu b_z = 0$, которые означают пропорциональность одноименных координат векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. По лемме о трех определителях (см. (2.12) — (2.13)), указанная система соотношений имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = 0. \text{ ▼} \qquad (2.35)$$

Пример 20 (условие компланарности векторов). Пусть $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ — базис в пространстве. Докажите, что векторы $\boldsymbol{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$, $\boldsymbol{c} = (c_x;\ c_y;\ c_z)$ компланарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.36)$$

▲ Векторы

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e}_1 + a_y\boldsymbol{e}_2 + a_z\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{e}_1 + b_y\boldsymbol{e}_2 + b_z\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{e}_1 + c_y\boldsymbol{e}_2 + c_z\boldsymbol{e}_3$$

компланарны тогда и только тогда (см. пример 9), когда они линейно зависимы, т.е. существуют числа x, y, z, не равные нулю одновременно, такие, что $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \vec{0}$, т.е.

$$(a_x x + b_x y + c_x z)\boldsymbol{e}_1 + (a_y x + b_y y + c_y z)\boldsymbol{e}_2 + (a_z x + b_z y + c_z z)\boldsymbol{e}_3 = \vec{0}.$$

Так как $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ — базис, то $(x; y; z)$ — нетривиальное решение системы уравнений

$$a_x x + b_x y + c_x z = 0,\ a_y x + b_y y + c_y z = 0,\ a_z x + b_z y + c_z z = 0. \qquad (2.37)$$

По теореме о нетривиальном решении однородной системы уравнений (см. теорему 2 §4 этой главы), система (2.37) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда выполнено равенство (2.36). ▼

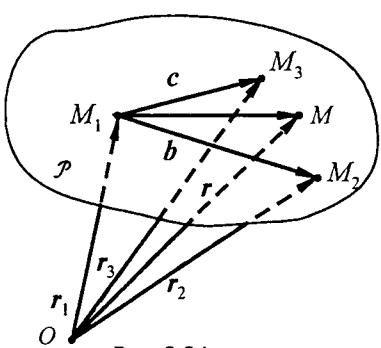

Рис. 2.24

Пример 21 (векторное параметрическое уравнение плоскости). Пусть в пространстве зафиксирован полюс O и заданы три точки M_1, M_2, M_3, не лежащие на одной прямой. Опишите множество радиус-векторов всех точек плоскости $P = (M_1M_2M_3)$.

▲ Пусть $\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$, $\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$, $\boldsymbol{r}_3 = \overrightarrow{OM_3}$ — радиус-векторы соответственно точек M_1, M_2, M_3 (рис. 2.24), $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1$. Векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ образуют базис в плоскости $\mathcal{P}$. Через $\boldsymbol{r}$ обозначим радиус-вектор произвольной точки $M \in \mathcal{P}$. Точка M лежит в плоскости $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_1M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$ раскладывается по векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ (см. формулу (2.28) и признак компланарности

векторов (пример 2 §5 этой главы)), т.е. существуют такие числа t и τ (зависящие от M), что $\overrightarrow{M_1M} = t\boldsymbol{b} + \tau\boldsymbol{c}$, или

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) + \tau(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1). \tag{2.38}$$

Соотношение

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{b} + \tau\boldsymbol{c}, \quad t \in R, \quad \tau \in R \tag{2.39}$$

называется *векторным параметрическим уравнением плоскости* $\mathcal{P}$, *проходящей через точку* $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ *и параллельной векторам* $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$. Правая часть соотношения (2.39) при произвольных действительных t и τ определяет совокупность радиус-векторов всех точек плоскости $\mathcal{P}$ и только их.

Соотношение (2.39) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{r} = \theta\boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{r}_2 + \tau\boldsymbol{r}_3, \quad \theta + t + \tau = 1. \tag{2.40}$$

Система уравнений (2.40) параметрически задает плоскость, проходящую через точки M_1, M_2, M_3. Числа $\theta = \theta(M)$, $t = t(M)$ и $\tau = \tau(M)$ называются *барицентрическими координатами точки* M *на плоскости* $\mathcal{P}$ относительно точек $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, $M_2(\boldsymbol{r}_2)$, $M_3(\boldsymbol{r}_3)$. ▼

§6. Система координат. Координаты точки в системе координат. Деление отрезка в заданном отношении. Координатные уравнения прямой и плоскости

Если в пространстве зафиксированы полюс O и базис $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, то говорят, что в пространстве задана *(декартова) система координат* $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Точка O называется *началом координат*, прямые, проходящие через начало координат и параллельные соответственно векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, называются *осями координат* и обозначаются Ox (ось абсцисс), Oy (ось ординат), Oz (ось аппликат). Плоскость, определяемая координатными осями Ox и Oy, называется *координатной плоскостью* Oxy. Аналогично определяются координатные плоскости Oyz и Oxz (рис. 2.25). Если M — произвольная точка пространства, то ее *координатами* $(x; y; z)$ *в системе координат* $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ называются коэффициенты разложения радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M по базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$: $\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$. Если ясно, о какой системе координат идет речь, то говорят просто о координатах точки M. Тот факт, что точка M имеет координаты $(x; y; z)$, записы-