векторов (пример 2 §5 этой главы)), т.е. существуют такие числа t и τ (зависящие от M), что $\overrightarrow{M_1M} = t\boldsymbol{b} + \tau\boldsymbol{c}$, или

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) + \tau(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1). \tag{2.38}$$

Соотношение

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{b} + \tau\boldsymbol{c}, \quad t \in R, \quad \tau \in R \tag{2.39}$$

называется *векторным параметрическим уравнением плоскости* $\mathcal{P}$, *проходящей через точку* $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ *и параллельной векторам* $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$. Правая часть соотношения (2.39) при произвольных действительных t и τ определяет совокупность радиус-векторов всех точек плоскости $\mathcal{P}$ и только их.

Соотношение (2.39) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{r} = \theta\boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{r}_2 + \tau\boldsymbol{r}_3, \quad \theta + t + \tau = 1. \tag{2.40}$$

Система уравнений (2.40) параметрически задает плоскость, проходящую через точки M_1, M_2, M_3. Числа $\theta = \theta(M)$, $t = t(M)$ и $\tau = \tau(M)$ называются *барицентрическими координатами точки* M *на плоскости* $\mathcal{P}$ относительно точек $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, $M_2(\boldsymbol{r}_2)$, $M_3(\boldsymbol{r}_3)$. ▼

§6. Система координат. Координаты точки в системе координат. Деление отрезка в заданном отношении. Координатные уравнения прямой и плоскости

Если в пространстве зафиксированы полюс O и базис $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, то говорят, что в пространстве задана *(декартова) система координат* $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Точка O называется *началом координат*, прямые, проходящие через начало координат и параллельные соответственно векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, называются *осями координат* и обозначаются Ox (ось абсцисс), Oy (ось ординат), Oz (ось аппликат). Плоскость, определяемая координатными осями Ox и Oy, называется *координатной плоскостью* Oxy. Аналогично определяются координатные плоскости Oyz и Oxz (рис. 2.25). Если M — произвольная точка пространства, то ее *координатами* $(x; y; z)$ *в системе координат* $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ называются коэффициенты разложения радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M по базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$: $\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$. Если ясно, о какой системе координат идет речь, то говорят просто о координатах точки M. Тот факт, что точка M имеет координаты $(x; y; z)$, записы-

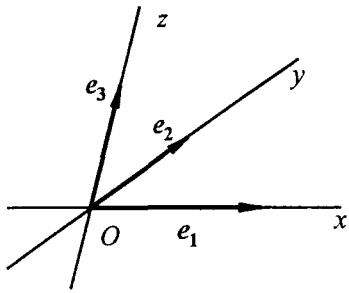

Рис. 2.25

вают так: $M(x; y; z)$. Поскольку каждый вектор $\overrightarrow{OM}$ может быть разложен по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$, в заданной системе координат $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ каждая точка M имеет координаты. На основании свойства 1° координат вектора точка M полностью определяется своими координатами: точки $M(x; y; z)$ и $M_1(x_1; y_1; z_1)$ совпадают тогда и только тогда, когда выполняются равенства $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Если точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ заданы своими координатами в системе координат $\{O, e_1, e_2, e_3\}$, то в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ имеем $\overrightarrow{OA} = (x_1; y_1; z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2; y_2; z_2)$. Согласно свойству линейности координат вектора, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, т.е. *координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ находятся как разности соответствующих координат конца B и начала A этого вектора в системе координат $\{O, e_1, e_2, e_3\}$, где O — произвольная точка пространства.*

Пример 1. В условиях примера 12 §5 этой главы найдите:

а) координаты точки O в системе координат $\{B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\}$;

б) координаты точки L в системе координат $\{A, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AC}\}$.

▲ а) Так как $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$, то $O\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

б) Имеем:

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{KD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OD}, \quad \overrightarrow{DL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD}).$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BO} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} =$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

т.е. $L\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$. ▼

Пример 2. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Найдите координаты точки A_1 в системе координат $\{B_1, \overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{BA_1}\}$.

▲ Имеем $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA_1} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BA_1}$. В примере 11 §5 этой главы доказано, что $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA_1}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{B_1A_1} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB_1} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BA_1} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA_1}$$

и, значит, $A_1\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. ▼

Пример 3. В системе координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ заданы три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(0;1;-1)$, $B(1;0;2)$, $C(2;3;0)$. Найдите координаты точки D.

▲ Пусть $D(x_D; y_D; z_D)$. Поскольку в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ $\overrightarrow{BC} = (1;3;-2)$, $\overrightarrow{AD} = (x_D; y_D - 1; z_D + 1)$, а векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ противоположных сторон параллелограмма равны, $1 = x_D$, $3 = y_D - 1$, $-2 = z_D + 1$. Отсюда $x_D = 1$, $y_D = 4$, $z_D = -3$. ▼

Пример 4. В системе координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ $A(1;0;-2)$, $B(-3;4;2)$, $C(0;1;3)$, $D(2;-1;1)$. Проверьте, что точки A, B, C, D лежат в одной плоскости. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и противоположно направлены, а векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ не коллинеарны.

▲ В базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$: $\overrightarrow{AB} = (-4;4;4)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;1;5)$, $\overrightarrow{AD} = (1;-1;3)$. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарны. По условию компланарности достаточно проверить, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

(ср. с (2.36)) равен нулю. Имеем:

$$\Delta = (-4)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4)\cdot 8 - 4\cdot(-8) + 4\cdot 0 = 0.$$

Следовательно, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости. Далее, $\overrightarrow{CD} = (2; -2; -2)$, $\overrightarrow{AB} = (-4;\ 4;\ 4)$. Согласно свойству линейности координат вектора, $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$, т.е. $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ (третий закон умножения вектора на число). Наконец, $\overrightarrow{BC} = (3;\ -3;\ 1)$, $\overrightarrow{AD} = (1;\ -1;\ 3)$. Так как $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, то в соответствии с условием коллинеарности векторов (см. пример 19 §5 этой главы) векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ не коллинеарны. ▼

Пример 5. В некоторой системе координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, $C(x_C;\ y_C;\ z_C)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

▲ Если K — середина $[BC]$, то

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) =$$

$$= \frac{1}{2}((-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})) = -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Если $N(x_N; y_N; z_N)$ — точка пересечения медиан ΔABC, то

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),\ \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Подставляя в это равенство разложения радиус-векторов $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ по базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, получаем:

$$x_N\boldsymbol{e}_1 + y_N\boldsymbol{e}_2 + z_N\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{3}((x_A\boldsymbol{e}_1 + y_A\boldsymbol{e}_2 + z_A\boldsymbol{e}_3) + (x_B\boldsymbol{e}_1 + y_B\boldsymbol{e}_2 + z_B\boldsymbol{e}_3) +$$

$$+(x_C\boldsymbol{e}_1 + y_C\boldsymbol{e}_2 + z_C\boldsymbol{e}_3)) =$$

$$= \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C)\boldsymbol{e}_3.$$

В силу единственности разложения по базису отсюда имеем:

$$x_N = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C), \quad y_N = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C),$$

$$z_N = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C), \tag{2.41}$$

т.е. *координаты точки пересечения медиан (центра тяжести) треугольника являются средними арифметическими соответствующих координат его вершин.* ▼

Пример 6 (координатные уравнения прямой). Пусть в пространстве заданы система координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и две различные точки $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ и $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$. Напишите систему уравнений, определяющую прямую (AB), т.е. такую систему уравнений, которой удовлетворяют координаты $(x; y; z)$ произвольной точки $M(x; y; z)$ прямой (AB) и только они.

▲ Воспользуемся векторным параметрическим уравнением прямой $l = (AB)$ (см. пример 6 §3 этой главы и формулу (2.5)). Точка $M(x;\ y;\ z)$ лежит на прямой l тогда и только тогда, когда существует такое число t, что $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A)$. Поскольку векторное равенство эквивалентно трем координатным, получаем, что $M \in l$ тогда и только тогда, когда

$$x = x_A + ta_x, \quad y = y_A + ta_y, \quad z = z_A + ta_z$$

$$(a_x = x_B - x_A, \quad a_y = y_B - y_A, \quad a_z = z_B - z_A) \tag{2.42}$$

при некотором $t \in R$. Точки A и B различны, поэтому хотя бы одна из координат $(a_x;\ a_y;\ a_z)$ направляющего вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ прямой l отлична от нуля. Пусть, например, $a_x \neq 0$. Тогда, выразив t из первого уравнения системы (2.42): $t = \dfrac{x - x_A}{a_x}$ — и подставив найденное значение t во второе и третье уравнения, получим систему двух уравнений относительно x, y и z, определяющую прямую l в пространстве:

$$y - y_A = \frac{x - x_A}{a_x} a_y, \quad z - z_A = \frac{x - x_A}{a_x} a_z, \text{ или}$$

$$a_x(y - y_A) = a_y(x - x_A), \quad a_x(z - z_A) = a_z(x - x_A). \tag{2.43}$$

Обычно систему (2.43) записывают в симметричной форме

$$\frac{x - x_A}{a_x} = \frac{y - y_A}{a_y} = \frac{z - z_A}{a_z}, \tag{2.44}$$

подразумевая при этом, что если знаменатель одной из дробей равен нулю, то (см. (2.43)) равен нулю и числитель этой дроби. Например, если $a_y = 0$, а $a_z \neq 0$, то систему уравнений (2.44) надо понимать так:

$$y = y_A, \quad a_x(z - z_A) = a_z(x - x_A).$$

Если $a_y = y_B - y_A = 0$ и $a_z = z_B - z_A = 0$, то система уравнений (2.44) принимает вид $y = y_A$, $z = z_A$, т.е. определяет прямую $l = (AB)$, параллельную оси абсцисс и проходящую через точку $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$. Параметрические уравнения (2.42) этой прямой имеют вид $x = x_A + a_x t$, $y = y_A$, $z = z_A$, $t \in R$ $(a_x \neq 0)$.

Так как $a_x = x_B - x_A$, $a_y = y_B - y_A$, $a_z = z_B - z_A$, то система уравнений (2.44), определяющих прямую $l = (AB)$, которая проходит через две заданные точки $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ и $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, может быть записана также в виде

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}. \tag{2.45}$$

Уравнения системы (2.44), (2.45) называются *каноническими уравнениями прямой l в пространстве.* ▼

Пример 7. В некоторой системе координат прямая l задана уравнениями $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-5}{0}$. Укажите координаты каких-либо двух точек этой прямой.

▲ Перепишем уравнения прямой l в параметрическом виде (ср. с (2.44) и (2.42)):

$$x = 1 - 2t, \quad y = -3 + t, \quad z = 5 + 0 \cdot t.$$

При $t = 0$ получаем координаты одной точки прямой l: $A(1;\ -3;\ 5)$, при $t = 1$ — второй точки: $B(-1;\ -2;\ 5)$. Координаты точек A и B можно

найти и так: координаты точки $A(x_A; y_A; z_A)$ отнимаются от переменных x, y, z в канонических уравнениях (2.44), поэтому по заданным уравнениям прямой l находим $x_A = 1$, $y_A = -3$, $z_A = 5$; координаты точки $B(x_B; y_B; z_B)$ находим из условия равенства направляющего вектора $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $a_x = -2$, $a_y = 1$, $a_z = 0$ прямой $l = (AB)$ вектору $\overrightarrow{AB}$ (ср. с (2.44) и (2.45)): $x_B - x_A = -2$, $y_B - y_A = 1$, $z_B - z_A = 0$, т.е. $x_B = x_A - 2 = -1$, $y_B = -2$, $z_B = 5$. ▼

Пример 8. В некоторой системе координат прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями

$$l_1\colon\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}, \quad l_2\colon\ \frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}.$$

Выясните, пересекаются ли эти прямые.

▲ Прямые l_1 и l_2 пересекаются тогда и только тогда, когда существует точка M, координаты $(x*; y*; z*)$ которой удовлетворяют как уравнениям прямой l_1, так и уравнениям прямой l_2, т.е. системе следующих четырех уравнений:

$$x* - 1 = 2(y* - 2), \quad z* - 3 = y* - 2, \quad x* = y* - 3, \quad z* = 2(y* - 3). \qquad (2.46)$$

Если эта система имеет решение, то оно находится из первых трех уравнений и автоматически должно удовлетворить четвертому уравнению. Из первых трех уравнений находим: $x* = -3$, $y* = 0$, $z* = 1$. Подставляя найденные значения в четвертое уравнение, получаем $1 = 2 \cdot (0 - 3)$. Имеет место противоречие. Система уравнений (2.46) решений не имеет, т.е. l_1 и l_2 не пересекаются. ▼

Пример 9 (задача о делении отрезка в заданном отношении). Пусть в пространстве заданы система координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ и две различные точки $A(x_A; y_A; z_A)$ и $B(x_B; y_B; z_B)$. Точка M лежит на отрезке $[AB]$ и делит его в отношении $\lambda = |AM| : |MB|$. Определите координаты точки M.

▲ По формуле (2.6) имеем $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{\lambda + 1}(\overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{OB})$. Подставляя в это равенство разложения векторов по базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, получаем на основании свойства линейности координат и свойства 1° координат векторов:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{\lambda + 1},\ y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{\lambda + 1},\ z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{\lambda + 1}. \blacktriangledown \qquad (2.47)$$

Пример 10. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеем: $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ -1;\ 0)$, $C(1;\ 1;\ 2)$, $D_1(3;\ 3;\ 2)$, точка N — середина $[AD]$, точка M делит отрезок $[CC_1]$ в отношении $|C_1M|:|MC| = 2$. Напишите канонические уравнения прямой $l = (MN)$ в той системе координат, в которой заданы координаты точек A, B, C, D_1.

▲ Пусть $(x_D; y_D; z_D)$ — координаты точки D (рис. 2.26). Вектор $\overrightarrow{AD}$ имеет координаты $(x_D - 1;\ y_D - 1;\ z_D - 1)$. Координаты вектора $\overrightarrow{BC}$ таковы:

$$(1-2;\ 1-(-1);\ 2-0) = (-1;\ 2;\ 2).$$

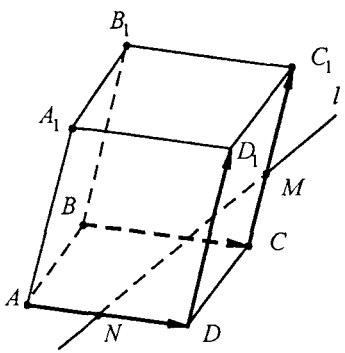

Рис. 2.26

Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ равны, поэтому равны и их одноименные координаты: $x_D - 1 = -1$, $y_D - 1 = 2$, $z_D - 1 = 2$, т.е. $x_D = 0$, $y_D = 3$, $z_D = 3$. Точка N — середина отрезка $[AD]$ (делит его в отношении 1:1). Следовательно,

$$x_N = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{1}{2},$$

$$y_N = \frac{y_A + y_D}{2} = 2,\ z_N = 2.$$

Пусть $(\alpha; \beta; \gamma)$ — координаты точки C_1. Из равенства векторов $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$ получаем: $\alpha - 1 = 3 - 0$, $\beta - 1 = 3 - 3$, $\gamma - 2 = 2 - 3$, т.е. $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$. По формулам (2.47) деления отрезка в заданном отношении имеем:

$$x_M = \frac{\alpha + 2x_C}{3} = \frac{4 + 2\cdot 1}{3} = 2,\ y_M = \frac{\beta + 2y_C}{3} = \frac{1 + 2\cdot 1}{3} = 1,$$

$$z_M = \frac{\gamma + 2z_C}{3} = \frac{5}{3}.$$

Следовательно, канонические уравнения прямой (MN) имеют вид

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{y-2}{1-2}=\frac{z-2}{\frac{5}{3}-2}, \text{ или } \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{-\frac{1}{3}}. \blacktriangledown$$

Если l: $\dfrac{x-\alpha}{a_x}=\dfrac{y-\beta}{a_y}=\dfrac{z-\gamma}{a_z}$ и L: $\dfrac{x-\lambda}{b_x}=\dfrac{y-\mu}{b_y}=\dfrac{z-\nu}{b_z}$ — две прямые, заданные каноническими уравнениями в некоторой системе координат в пространстве, то $\boldsymbol{a}=(a_x;\ a_y;\ a_z)$ и $\boldsymbol{b}=(b_x;\ b_y;\ b_z)$ — направляющие векторы этих прямых. Прямые l и L параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны их направляющие векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. По условию коллинеарности это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}=0.$$

Если точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ заданы своими координатами в системе координат $\{O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, началом которой является полюс O, то векторное параметрическое уравнение плоскости $\mathcal{P}=(M_1M_2M_3)$ (2.39) эквивалентно системе

$$\begin{cases} x=x_1+t\,(x_2-x_1)+\tau(x_3-x_1), \\ y=y_1+t\,(y_2-y_1)+\tau(y_3-y_1), \\ z=z_1+t\,(z_2-z_1)+\tau(z_3-z_1) \end{cases} \tag{2.48}$$

трех скалярных уравнений относительно координат $(x;\ y;\ z)$ точки $M\in\mathcal{P}$ и чисел t и τ, зависящих от M. Уравнения системы (2.48) — параметрические уравнения плоскости $\mathcal{P}$.

Пример 11 (координатное уравнение плоскости). Пусть в пространстве задана система координат $\{O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$. Докажите, что уравнение любой плоскости $\mathcal{P}$, проходящей через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, имеет вид

$$A\,(x-x_1)+B\,(y-y_1)+C\,(z-z_1)=0,\quad A^2+B^2+C^2>0. \tag{2.49}$$

▲ Зафиксируем на плоскости $\mathcal{P}$ еще две точки $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$ так, чтобы M_1, M_2 и M_3 не лежали на одной прямой. Положим $\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{b}=(b_x;\ b_y;\ b_z)$, $b_x=x_2-x_1$, $b_y=y_2-y_1$, $b_z=z_2-z_1$; $\overrightarrow{M_1M_3}=\boldsymbol{c}=(c_x;\ c_y;\ c_z)$, $c_x=x_3-x_1$, $c_y=y_3-y_1$, $c_z=z_3-z_1$. Точка $M(x;\ y;\ z)$

лежит в плоскости $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны. По условию компланарности, это имеет место тогда и только тогда, когда координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0, \qquad (2.50)$$

или $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$, где

$$A=\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad B=-\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_c & c_z \end{vmatrix}, \quad C=\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}.$$

Неравенство $A^2+B^2+C^2>0$ следует (см. пример 19 §5 этой главы) из неколлинеарности векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. ▼

Уравнение (2.50) называется *координатным уравнением плоскости, проходящей через точку* $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ *и параллельной векторам* $\boldsymbol{b}=(b_x; b_y; b_z)$ и $\boldsymbol{c}=(c_x;\ c_y;\ c_z)$. Его можно записать также в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.51)$$

Уравнение (2.51) называется уравнением плоскости $\mathcal{P}=(M_1M_2M_3)$, проходящей через три данные точки. Уравнение (2.49) можно записать также в виде

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A^2+B^2+C^2>0, \qquad (2.52)$$

где $D=-Ax_1-By_1-Cz_1$.

Пример 12. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;\ 3;\ 1)$, $M_2(3;\ 1;\ 4)$, $M_3(2;\ 1;\ 5)$.

▲ По формуле (2.51) уравнение искомой плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 3-2 & 1-3 & 4-1 \\ 2-2 & 1-3 & 5-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+2y+z-9=0. \ ▼$$

Пример 13. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;\ 7;\ 2)$ и параллельной прямым

$$l\colon \frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{2} \text{ и } L\colon \frac{x-3}{5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{1}.$$

▲ Плоскость, параллельная прямым l и L, параллельна направляющим векторам $\boldsymbol{b}=(4;1;2)$ и $\boldsymbol{c}=(5;3;1)$ этих прямых. По формуле (2.50) уравнение искомой плоскости таково

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z-2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 5x-6y-7z+41=0. \ ▼$$

Пример 14. Напишите уравнение плоскости $\mathcal{P}$, проходящей через точку $M_1(1;0;-1)$ и содержащей прямую $l\colon \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$.

▲ Точка $M_2(0;-1;2)$ прямой l лежит в плоскости $\mathcal{P}$. Следовательно, плоскость $\mathcal{P}$ параллельна вектору $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{M_1M_2}$ и вектору $\boldsymbol{c}=(2;\ 3;\ 1)$ — направляющему вектору прямой l. По формуле (2.50) уравнение плоскости $\mathcal{P}$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-(-1) \\ 0-1 & -1-0 & 2-(-1) \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 10x-7y+z-9=0. \ ▼$$

Пример 15* (условие параллельности двух плоскостей). Докажите, что плоскости $\mathcal{P}_1\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_1^2+B_1^2+C_1^2>0$ и $\mathcal{P}_2\colon A_2x+B_2y+$ $+C_2z+D_2=0,\ A_2^2+B_2^2+C_2^2>0$ параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{N}_1=(A_1;\ B_1;\ C_1)\neq\vec{0}$ и $\vec{N}_2=(A_2;\ B_2;\ C_2)\neq\vec{0}$ коллинеарны, т.е. существует такое число $\lambda\neq 0$, что

$$A_2=\lambda A_1,\ B_2=\lambda B_1,\ C_2=\lambda C_1. \tag{2.53}$$

▲ Пусть плоскости $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ таковы, что для коэффициентов их уравнений выполнено равенство (2.53) при некотором $\lambda\neq 0$. Тогда уравнение $\mathcal{P}_2$ имеет вид $\lambda A_1x+\lambda B_1y+\lambda C_1z+D_2=0$, или $A_1x+B_1y+C_1z+D_2/\lambda=0$. Если $D_1=D_2/\lambda$, то уравнения плоскостей $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ совпадают, т.е. совпадают и плоскости $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$; если же $D_1\neq D_2/\lambda$, то система уравнений

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_2/\lambda=0$$

для нахождения координат общих точек плоскостей $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ несовместна, т.е. $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$. В обоих случаях плоскости $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ параллельны.

Итак, изменяя константу D_1 в уравнении плоскости $\mathcal{P}_1$, можно получить уравнение плоскостей, параллельных $\mathcal{P}_1$. Проверим, что таким образом можно получить уравнения всех плоскостей, параллельных $\mathcal{P}_1$. Если плоскость $\mathcal{P}^*$ параллельна $\mathcal{P}_1$, то $\mathcal{P}^*$ может быть получена из $\mathcal{P}_1$ параллельным переносом на некоторый вектор $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Поэтому если $\mathcal{P}^* \parallel \mathcal{P}_1$, то точка $M^*(x; y; z)$ принадлежит плоскости $\mathcal{P}^*$ тогда и только тогда, когда точка $M_1(x - a_x;\ y - a_y;\ z - a_z)$ $(\overrightarrow{M_1M^*} = \boldsymbol{a},\ M^* = T_{\overrightarrow{M_1M^*}}(M_1))$ принадлежит плоскости $\mathcal{P}_1$, т.е. $A_1x + B_1y + C_1z + D^* = 0$, $D^* = D_1 - A_1a_x - B_1a_y - C_1a_z$. Итак, одно из уравнений плоскости $\mathcal{P}^*$ получено из уравнения плоскости $\mathcal{P}_1$ изменением константы D_1 на D^*.

Пусть теперь заданные в этом примере плоскости $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ параллельны. Тогда в соответствии с изложенным выше плоскости $\mathcal{P}_1^*$: $A_1x + B_1y + C_1z + 1 = 0$ и $\mathcal{P}_2^*$: $A_2x + B_2y + C_2z = 0$ также параллельны $(\mathcal{P}_1^* \| \mathcal{P}_1 \| \mathcal{P}_2 \| \mathcal{P}_2^*)$ и не совпадают (точка с координатами $(0; 0; 0)$ лежит в плоскости $\mathcal{P}_2^*$ и не лежит в плоскости $\mathcal{P}_1^*$). Следовательно, плоскости $\mathcal{P}_1^*$ и $\mathcal{P}_2^*$ не имеют общих точек и, значит, система уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = -1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = 0$$

не имеет решений. Тем более не имеет решений каждая из следующих систем уравнений:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0; \end{cases} \quad \text{(II)} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0, \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 0; \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0, \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0. \end{cases}$$

В соответствии с правилом Крамера (см. §4 этой главы) определитель матрицы каждой из этих систем $(\Delta_{\mathrm{I}}, \Delta_{\mathrm{II}}, \Delta_{\mathrm{III}})$ равен нулю. Таким образом,

$$\Delta_{\mathrm{I}} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{\mathrm{II}} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{\text{III}} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

В соответствии с условием коллинеарности (см. пример 19 §5 этой главы) векторы $\vec{N}_1 \neq \vec{0}$ и $\vec{N}_2 \neq \vec{0}$ коллинеарны, т.е. $\vec{N}_2 = \lambda \vec{N}_1$ при некотором $\lambda \neq 0$. Расписав это равенство по координатам, получаем (2.53). ▼

Пример 16*. Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ — уравнение плоскости $\mathcal{P}$. Докажите, что существуют неколлинеарные векторы $\boldsymbol{b} = (b_x; b_y; b_z)$ и $\boldsymbol{c} = (c_x;\ c_y;\ c_z)$ такие, что

$$A = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix},\ B = -\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}. \tag{2.54}$$

Докажите также, что векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ параллельны плоскости $\mathcal{P}$.

▲ Пусть $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ — произвольная точка плоскости $\mathcal{P}$. Тогда $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Вектор $\boldsymbol{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ параллелен плоскости $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда точка $M_2(x_1 + a_x;\ y_1 + a_y;\ z_1 + a_z)$ лежит в плоскости $\mathcal{P}$, т.е.

$$A(x_1 + a_x) + B(y_1 + a_y) + C(z_1 + a_z) + D = 0,$$

$$\text{или } Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0. \tag{2.55}$$

Условие (2.55) является необходимым и достаточным условием параллельности вектора $\boldsymbol{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ плоскости $\mathcal{P}: Ax + By + Cz + D = 0$.

Зафиксируем два произвольных неколлинеарных вектора $\boldsymbol{b}' = (b'_x; b'_y; b'_z)$ и $\boldsymbol{c}' = (c'_x;\ c'_y;\ c'_z)$, параллельных $\mathcal{P}$. Тогда на основании (2.50) одно из уравнений плоскости $\mathcal{P}$ запишется в виде $A'x + B'y + C'z + D' = 0$, где

$$A' = \begin{vmatrix} b'_y & b'_z \\ c'_y & c'_z \end{vmatrix},\ -B' = \begin{vmatrix} b'_x & b'_z \\ c'_x & c'_z \end{vmatrix},\ C' = \begin{vmatrix} b'_x & b'_y \\ c'_x & c'_y \end{vmatrix},$$

$$D' = -A'x_1 - B'y_1 - C'z_1.$$

Плоскость $\mathcal{P}$ параллельна самой себе. Учитывая результаты примера 15, найдем такое число λ, что

$$A = \lambda A' = \lambda \begin{vmatrix} b'_y & b'_z \\ c'_y & c'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda b'_y & \lambda b'_z \\ c'_y & c'_z \end{vmatrix},\ B = -\begin{vmatrix} \lambda b'_x & \lambda b'_z \\ c'_x & c'_z \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} \lambda b'_x & \lambda b'_y \\ c'_x & c'_y \end{vmatrix}.$$

Это означает, что в качестве искомых можно взять векторы $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{b}'$ и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}'$.

Пусть теперь векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ удовлетворяют условию (2.54). Тогда

$$Ab_x + Bb_y + Cb_z = b_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - b_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + b_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0,$$

$$Ac_x + Bc_y + Cc_z = c_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

В соответствии с условием (2.55) каждый из векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ параллелен плоскости $\mathcal{P}$. ▼

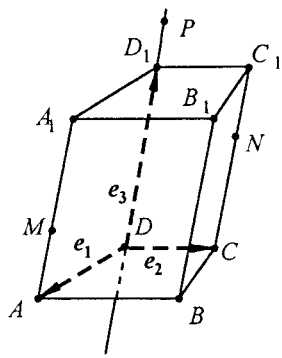

Рис. 2.27

Пример 17. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$ $((AB)\|(CD))$, $|CD|:|AB| = \lambda < 1$. Плоскость, проходящая через точку B, пересекает ребра $[AA_1]$, $[CC_1]$ и прямую (DD_1) соответственно в точках M, N и P, причем $|AM|:|AA_1| = m$, $|CN|:|CC_1| = n$. Найдите отношение $|DP|:|DD_1|$.

▲ Положим $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{DA}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{DC}$, $\boldsymbol{e}_3 = \overrightarrow{DD_1}$ (рис. 2.27). В системе координат $\{D, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ вершины призмы имеют координаты

$$A(1;0;0),\ B(x_B;y_B;0),\ C(0;1;0),$$
$$D(0;0;0),\ A_1(1;0;1),\ B_1(x_B;y_B;1),$$
$$C_1(0;1;1),\ D_1(0;0;1).$$

Вычислим координаты точки $B(x_B;\ y_B;\ 0)$ (эта точка лежит в плоскости (DAC), поэтому ее третья координата равна нулю). По условию, $\overrightarrow{DC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, или

$$\boldsymbol{e}_2 = \lambda((x_B - 1)\boldsymbol{e}_1 + y_B\boldsymbol{e}_2 + 0\cdot\boldsymbol{e}_3).$$

Отсюда находим: $\lambda(x_B - 1) = 0$, $\lambda y_B = 1$, т.е. $x_B = 1$, $y_B = \frac{1}{\lambda}$. Далее, по условию, $\overrightarrow{AM} = (x_M - 1; y_M; z_M) = m\overrightarrow{AA_1}$; $\overrightarrow{AA_1} = (0; 0; 1)$. Следовательно, $x_M - 1 = m \cdot 0 = 0$, $y_M = m \cdot 0 = 0$, $z_M = m \cdot 1 = m$, т.е. $M(1; 0; m)$. Аналогично, $N(0; 1; n)$. Уравнение плоскости (BMN) имеет вид (ср. с (2.51)):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1/\lambda & z-0 \\ 1-1 & 0-1/\lambda & m-0 \\ 0-1 & 1-1/\lambda & n-0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{m-n-\lambda m}{\lambda}(x-1) - m\left(y - \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{z}{\lambda} = 0.$$

Точка $P(0; 0; z_P)$ лежит на оси аппликат, поэтому первые две ее координаты — нули. Из условия $P \in (BMN)$ получаем

$$\frac{m-n-\lambda m}{\lambda}(0-1) - m\left(0 - \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{z_P}{\lambda} = 0, \text{ т.е.}$$

$$z_P = n + \lambda m.$$

Окончательно имеем

$$|DP| : |DD_1| = |z_P \boldsymbol{e}_3| : |\boldsymbol{e}_3| = |z_P| = n + \lambda m. \blacktriangledown$$

Пример 18*. Внутри тетраэдра $ABCD$ взята точка K. Точки A', B', C', D' — соответственно точки пересечения прямых (AK), (BK), (CK), (DK) с плоскостями граней BCD, ACD, ABD, ABC. Докажите, что

$$\frac{|A'K|}{|AA'|} + \frac{|B'K|}{|BB'|} + \frac{|C'K|}{|CC'|} + \frac{|D'K|}{|DD'|} = 1.$$

▲ Выберем систему координат $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$. В этой системе координат $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $D(0;0;1)$. Пусть $K(m; n; p)$. Тогда $\overrightarrow{AK} = (m; n; p)$, $\overrightarrow{BK} = (m-1; n; p)$, $\overrightarrow{CK} = (m; n-1; p)$, $\overrightarrow{DK} = (m; n; p-1)$. Уравнения прямых:

$$(AK)\colon \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}; \quad (BK)\colon \frac{x-1}{m-1} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p};$$

$$(CK)\colon \frac{x}{m} = \frac{y-1}{n-1} = \frac{z}{p}; \quad (DK)\colon \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z-1}{p-1}.$$

Уравнения плоскостей:

$$(BCD)\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & 1-0 & 0-0 \\ 0-1 & 0-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0;$$

$$(ACD):\ \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ (ABD):\ y = 0;\ (ABC):\ z = 0.$$

Координаты точки $A' = (AK) \cap (BCD)$ находим из системы уравнений

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ x = mt, \\ y = nt, \\ z = pt \end{cases} \Leftrightarrow A'\left(\frac{m}{m+n+p};\ \frac{n}{m+n+p};\ \frac{p}{m+n+p}\right).$$

Координаты точки B' удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 1 + (m-1)t, \\ y = nt, \\ z = pt \end{cases} \Leftrightarrow B'\left(0;\ \frac{n}{1-m};\ \frac{p}{1-m}\right).$$

Аналогично находим $C'\left(\frac{m}{1-n}; 0; \frac{p}{1-n}\right)$, $D'\left(\frac{m}{1-p};\ \frac{n}{1-p};\ 0\right)$.

Далее имеем:

$$\overrightarrow{A'A} = \left(\frac{-m}{m+n+p};\ \frac{-n}{m+n+p};\ \frac{-p}{m+n+p}\right),$$

$$\overrightarrow{A'K} = \left(m - \frac{m}{m+n+p};\ n - \frac{n}{m+n+p};\ p - \frac{p}{m+n+p}\right) =$$

$$= \left(\frac{-m(1-(m+n+p))}{m+n+p};\ \frac{-n(1-(m+n+p))}{m+n+p};\ \frac{-p(1-(m+n+p))}{m+n+p}\right).$$

Следовательно, $\overrightarrow{A'K} = (1-(m+n+p))\,\overrightarrow{A'A}$. Векторы $\overrightarrow{A'K}$ и $\overrightarrow{A'A}$ сонаправлены, поэтому $1-(m+n+p) > 0$ и $\frac{|A'K|}{|AA'|} = 1-(m+n+p)$. Аналогично можно проверить, что $\frac{|B'K|}{|BB'|} = m$, $\frac{|C'K|}{|CC'|} = n$, $\frac{|D'K|}{|DD'|} = p$. Таким образом,

$$\frac{|A'K|}{|AA'|} + \frac{|B'K|}{|BB'|} + \frac{|C'K|}{|CC'|} + \frac{|D'K|}{|DD'|} = 1-(m+n+p)+m+n+p = 1. \ \blacktriangledown$$

Системой координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ *на плоскости* $\mathcal{P}$ называется совокупность полюса O (фиксированной точки O плоскости $\mathcal{P}$) и базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$

в плоскости $\mathcal{P}$ (рис. 2.28).

Координатами $(x; y)$ *точки* $M \in \mathcal{P}$ *в системе координат* $\{O, e_1, e_2\}$ называются коэффициенты разложения радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M по базису $\{e_1, e_2\}$: $\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2$. Тот факт, что $(x; y)$ — координаты точки M, записывается в виде $M(x; y)$.

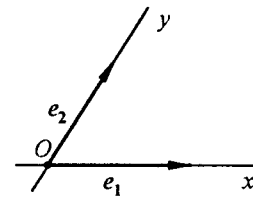

Рис. 2.28

Пусть $\mathcal{P}$ — некоторая плоскость, $\{O, e_1, e_2\}$ — система координат на плоскости $\mathcal{P}$, $A(x_A; y_A) \in \mathcal{P}$ и $B(x_B; y_B) \in \mathcal{P}$ — две различные точки. Параметрические уравнения прямой $l = (AB)$ имеют вид:

$$x = x_A + ta_x,$$

$$y = y_A + ta_y \quad (a_x = x_B - x_A,\ a_y = y_B - y_A),\ t \in R. \tag{2.56}$$

Каноническое уравнение прямой $l = (AB)$ *на плоскости* $\mathcal{P}$:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}, \text{ или} \tag{2.57}$$

$$\frac{x - x_A}{a_x} = \frac{y - y_A}{a_y}. \tag{2.58}$$

Уравнение (2.58) равносильно уравнению

$$A^*x + B^*y + C^* = 0, \quad (A^*)^2 + (B^*)^2 > 0, \tag{2.59}$$

где

$$A^* = y_B - y_A, \quad B^* = x_A - x_B, \quad C^* = y_A x_B - x_A y_B. \tag{2.60}$$

Согласно уравнению (2.59), направляющий вектор $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y)$ прямой l на плоскости $\mathcal{P}$ находится по правилу $a_x = -B^*$, $a_y = A^*$.

Формулы деления отрезка в заданном отношении в плоском случае имеют вид:

$$M \in [AB],\ \lambda = |AM| : |MB| \Leftrightarrow x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{\lambda + 1},\ y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{\lambda + 1}. \tag{2.61}$$

Пример 19. Найдите две точки A и B, если известно, что точка $C(-5; 4)$ делит отрезок $[AB]$ в отношении $3:4$, а точка $D(6; -5)$ — в отношении $2:3$.

▲ Пусть $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Тогда по формулам (2.61) имеем:

$$-5=\frac{x_A+(3/4)x_B}{3/4+1},\quad 4=\frac{y_A+(3/4)y_B}{3/4+1},\quad 6=\frac{x_A+(2/3)x_B}{2/3+1},$$

$$-5=\frac{y_A+(2/3)y_B}{2/3+1}.$$

Решая полученную систему уравнений относительно x_A, x_B, y_A, y_B, найдем: $x_A=160$, $x_B=-225$, $y_A=-131$, $y_B=184$; $A(160;-131)$, $B(-225;184)$. ▼

Пример 20. Напишите уравнение медианы (AM) треугольника ABC: $A(-5;4)$, $B(3;1)$, $C(2;-5)$.

▲ Середина M отрезка $[BC]$ имеет координаты $x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{5}{2}$, $y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=-2$. По формуле (2.57) уравнение (AM) имеет вид

$$\frac{x-(-5)}{5/2-(-5)}=\frac{y-4}{-2-4}\Leftrightarrow\frac{x+5}{15/2}=\frac{y-4}{-6}\Leftrightarrow 4x+5y=0.$$ ▼

Пример 21. Напишите уравнение прямой l, проходящей через точку $M(7;\ 4)$ и параллельной прямой L, уравнение которой $3x-2y+4=0$.

▲ Направляющий вектор $\boldsymbol{a}=(a_x;\ a_y)$ прямой L есть $\boldsymbol{a}=(2;\ 3)$. Так как $l\parallel L$, то $\boldsymbol{a}$ является и направляющим вектором l. По формуле (2.58) уравнение l таково:

$$\frac{x-7}{2}=\frac{y-4}{3}\Leftrightarrow 3x-2y-13=0.$$ ▼

Пример 22. Найдите координаты вершин $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$, $D(x_D;\ y_D)$ параллелограмма $ABCD$, если $C(3;-1)$, (AB): $x+y-3=0$, (AD): $y=2$.

▲ Точка A является общей точкой прямых (AB) и (AD). Поэтому ее координаты $(x_A;\ y_A)$ удовлетворяют системе уравнений $x_A+y_A-3=0$, $y_A=2$, решая которую, находим $x_A=1$, $y_A=2$. Направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ прямой (AB) равен $\boldsymbol{a}=(-1;\ 1)$. Он является и направляющим вектором (CD). Следовательно, уравнение (CD) имеет вид

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{1}\Leftrightarrow x+y-2=0.$$

Можно аналогично найти, что $y=-1$ — уравнение прямой (BC).

Координаты точек $B(x_B;\ y_B)$ и $D(x_D;\ y_D)$ удовлетворяют системам уравнений

$$\begin{cases} x_B + y_B - 3 = 0, \\ y_B = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} y_D = 2, \\ x_D + y_D - 2 = 0. \end{cases}$$

Решая эти системы, находим: $x_B = 4,\ y_B = -1,\ x_D = 0,\ y_D = 2.$ ▼

Пример 23. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 2.29) точка M — середина стороны $[BC]$, точка N — середина отрезка $[MD]$, P — точка пересечения прямых (AN) и (CD). Найдите координаты точек C и D, если $A(1;2)$, $B(4;-1)$, $P(2;\ 0)$. Найдите также отношение, в котором точка P делит отрезок $[CD]$.

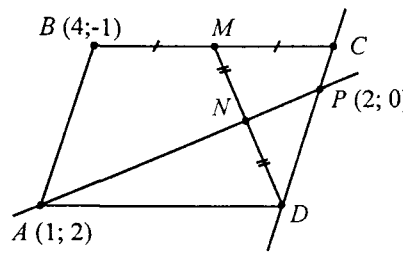

Рис. 2.29

▲ Пусть $D(\alpha;\beta)$. Из равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ следует, что координаты точки $C(x_C;y_C)$ соответственно равны

$$x_C = \alpha + (x_B - x_A) = \alpha + 3,\ \ y_C = \beta + (y_B - y_A) = \beta - 3.$$

Точка $M(x_M;\ y_M)$ — середина $[BC]$, поэтому $x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{\alpha + 7}{2}$, $y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{\beta - 4}{2}$. Точка $N(x_N;\ y_N)$ — середина $[MD]$, поэтому $x_N = \dfrac{x_M + x_D}{2} = \dfrac{3\alpha + 7}{4}$, $y_N = \dfrac{y_M + y_D}{2} = \dfrac{3\beta - 4}{4}$. Уравнение прямой (AP) имеет вид

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{0-2} \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0.$$

Точка $N \in (AP)$. Значит, координаты точки N удовлетворяют уравнению $2\dfrac{3\alpha + 7}{4} + \dfrac{3\beta - 4}{4} - 4 = 0$, или $2\alpha + \beta - 2 = 0$. По условию, точка $P(2;\ 0)$ лежит на прямой (DC), уравнение которой $\dfrac{x - \alpha}{(\alpha + 3) - \alpha} =$

$= \dfrac{y-\beta}{(\beta-3)-\beta}$. Следовательно, $\dfrac{2-\alpha}{3} = \dfrac{0-\beta}{-3}$, или $\alpha+\beta-2=0$. Решая систему уравнений $2\alpha+\beta-2=0$, $\alpha+\beta-2=0$, найдем $\alpha=0$, $\beta=2$. Окончательно имеем $D(0;\ 2)$, $C(3;\ -1)$. Отношение $\lambda = |CP|:|PD|$, в котором точка P делит отрезок $[CD]$, определяется из соотношения

$$x_P = \frac{x_C+\lambda x_D}{\lambda+1} \Leftrightarrow 2(\lambda+1) = 3+\lambda\cdot 0, \text{ т.е. } \lambda = \frac{1}{2}. \blacktriangledown$$

§7. Формулы перехода от одной системы координат к другой

Пусть в пространстве зафиксирована система координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, которую назовем "старой". Пусть также с помощью этой "старой" системы координат задана еще одна система координат $\{O', \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$, которую назовем "новой", т.е. заданы разложения

$$\boldsymbol{e}_1' = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + a_{13}\boldsymbol{e}_3,\ \ \boldsymbol{e}_2' = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{23}\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{e}_3' = a_{31}\boldsymbol{e}_1 + a_{32}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3 \tag{2.62}$$

векторов "нового" базиса по "старому" базису и заданы координаты $(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$ точки O' (начала "новой" системы координат) в "старой" системе координат:

$$\overrightarrow{OO'} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 + \gamma\boldsymbol{e}_3. \tag{2.63}$$

Рассмотрим произвольную точку M. Она имеет координаты $(x;\ y;\ z)$ в "старой" системе координат и координаты $(x';\ y';\ z')$ в "новой" системе координат:

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3,\ \ \overrightarrow{O'M} = x'\boldsymbol{e}_1' + y'\boldsymbol{e}_2' + z'\boldsymbol{e}_3'. \tag{2.64}$$

Формулы, выражающие "старые" координаты $(x;\ y;\ z)$ точки M через "новые" координаты $(x';\ y';\ z')$ этой точки, называются *формулами перехода от "старой" системы координат к "новой"*. Выведем эти формулы.

□ Из очевидного равенства $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ после подстановки в него соотношений (2.62) — (2.64) имеем

$$x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 + \gamma\boldsymbol{e}_3 + x'(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + a_{13}\boldsymbol{e}_3) +$$
$$+ y'(a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{23}\boldsymbol{e}_3) + z'(a_{31}\boldsymbol{e}_1 + a_{32}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3) =$$
$$= (a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' + \alpha)\boldsymbol{e}_1 + (a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z' + \beta)\boldsymbol{e}_2 +$$