

$\frac{y-\beta}{(\beta-3)-\beta}$ . Следовательно,  $\frac{2-\alpha}{3} = \frac{0-\beta}{-3}$ , или  $\alpha + \beta - 2 = 0$ . Решая систему уравнений  $2\alpha + \beta - 2 = 0$ ,  $\alpha + \beta - 2 = 0$ , найдем  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$ . Окончательно имеем  $D(0; 2)$ ,  $C(3; -1)$ . Отношение  $\lambda = |CP| : |PD|$ , в котором точка  $P$  делит отрезок  $[CD]$ , определяется из соотношения

$$x_P = \frac{x_C + \lambda x_D}{\lambda + 1} \Leftrightarrow 2(\lambda + 1) = 3 + \lambda \cdot 0, \text{ т.е. } \lambda = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangleright$$

## §7. Формулы перехода от одной системы координат к другой

Пусть в пространстве зафиксирована система координат  $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ , которую назовем “старой”. Пусть также с помощью этой “старой” системы координат задана еще одна система координат  $\{O', e'_1, e'_2, e'_3\}$ , которую назовем “новой”, т.е. заданы разложения

$$\begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, & e'_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, \\ e'_3 &= a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3 \end{aligned} \quad (2.62)$$

векторов “нового” базиса по “старому” базису и заданы координаты  $(\alpha; \beta; \gamma)$  точки  $O'$  (начала “новой” системы координат) в “старой” системе координат:

$$\vec{OO'} = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3. \quad (2.63)$$

Рассмотрим произвольную точку  $M$ . Она имеет координаты  $(x; y; z)$  в “старой” системе координат и координаты  $(x'; y'; z')$  в “новой” системе координат:

$$\vec{OM} = xe_1 + ye_2 + ze_3, \quad \vec{O'M} = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3. \quad (2.64)$$

Формулы, выражающие “старые” координаты  $(x; y; z)$  точки  $M$  через “новые” координаты  $(x'; y'; z')$  этой точки, называются *формулами перехода от “старой” системы координат к “новой”*. Выведем эти формулы.

□ Из очевидного равенства  $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$  после подстановки в него соотношений (2.62) — (2.64) имеем

$$\begin{aligned} xe_1 + ye_2 + ze_3 &= \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + x'(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3) + \\ &\quad + y'(a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3) + z'(a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) = \\ &= (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + \alpha)e_1 + (a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + \beta)e_2 + \end{aligned}$$

$$+ (a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' + \gamma)e_3.$$

Таким образом, получены два разложения вектора  $\vec{OM}$  по базису  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . В силу единственности разложения вектора по базису в пространстве соответствующие коэффициенты этих разложений должны совпадать:

$$\begin{aligned} x &= [a_{11}]x' + [a_{21}]y' + [a_{31}]z' + [\alpha] \\ y &= [a_{12}]x' + [a_{22}]y' + [a_{32}]z' + [\beta]. \blacksquare \\ z &= [a_{13}]x' + [a_{23}]y' + [a_{33}]z' + [\gamma] \end{aligned} \quad (2.65)$$

Это — искомые формулы перехода от “старой” системы координат к “новой”. Отметим, что в формулах (2.65) коэффициенты при  $x'$  суть координаты вектора  $e'_1$  в “старом” базисе (ср. с (2.62)), а коэффициенты при  $y'$  (при  $z'$ ) — координаты вектора  $e'_2$  (вектора  $e'_3$ ) в “старом” базисе. Последние слагаемые в формулах перехода (2.65) — это “старые” координаты “нового” начала координат  $O'$ .

Матрица

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов при  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  в формулах (2.65), называется *матрицей перехода от “старой” системы координат к “новой”* или *матрицей перехода от “старого” базиса к “новому”*.

Приведем свойства матрицы перехода  $S$ .

1°.  $\det S \neq 0$ .

□ Векторы  $e'_1$ ,  $e'_2$ ,  $e'_3$  (см. (2.62)) не компланарны. По условию компланарности (см. пример 20 §5 этой главы), определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Но этот определитель есть  $\det S^T$ . Так как  $\det S^T = \det S$  (свойство 1° определителей), то  $\det S = \Delta \neq 0$ . ■

2°. Если одноименные векторы “старого” и “нового” базисов совпадают, то  $S$  — единичная матрица,  $\det S = 1$ . В этом случае переход от “старой” системы координат к “новой” называется *переносом начала координат*. Формулы этого перехода:

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma.$$

3°. Матрица перехода  $S'$  от “нового” базиса к “старому” является обратной матрицей к матрице  $S$ :

$$S' = S^{-1}, \quad \det S' = \frac{1}{\det S}.$$

□ Решая по правилу Крамера систему уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' &= x - \alpha, & a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z' &= y - \beta, \\ a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' &= z - \gamma \end{aligned}$$

относительно  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , получаем (см. формулы (2.23) — (2.25) и теорему 1 §4 этой главы):

$$x' = b_{11}(x - \alpha) + b_{21}(y - \beta) + b_{31}(z - \gamma) = b_{11}x + b_{21}y + b_{31}z + \alpha',$$

$$y' = b_{12}(x - \alpha) + b_{22}(y - \beta) + b_{32}(z - \gamma) = b_{12}x + b_{22}y + b_{32}z + \beta', \quad (2.66)$$

$$z' = b_{13}(x - \alpha) + b_{23}(y - \beta) + b_{33}(z - \gamma) = b_{13}x + b_{23}y + b_{33}z + \gamma',$$

где  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$  — матрица, обратная к матрице  $S$ .

Согласно свойству обратной матрицы,  $\det B = \frac{1}{\det S}$ . Так как матрица  $B$  составлена (по столбцам) из коэффициентов при  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно в формулах, выражающих “новые” координаты точки через ее “старые” координаты (см. (2.66)), то  $B = S'$  — матрица перехода от “новой” системы координат к “старой”, или, что то же, от “нового” базиса к “старому”. ■

4°. Пусть фиксированы три системы координат:

$$(I) \{O, e_1, e_2, e_3\}, \quad (II) \{O', e'_1, e'_2, e'_3\}, \quad (III) \{O'', e''_1, e''_2, e''_3\}$$

и пусть

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{21} & a'_{31} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{32} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{21} & a''_{31} \\ a''_{12} & a''_{22} & a''_{32} \\ a''_{13} & a''_{23} & a''_{33} \end{pmatrix}$$

— соответственно матрицы перехода от системы координат (I) к системе координат (II), от системы координат (II) к системе координат (III), от системы координат (I) к системе координат (III). Тогда  $S_2 = S \cdot S_1$ ,  $\det S_2 = \det S \cdot \det S_1$ .

□ В соответствии с формулами (2.62), (2.65) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= a'_1 \mathbf{e}'_1 + a'_{12} \mathbf{e}'_2 + a'_{13} \mathbf{e}'_3, & \mathbf{e}'_1 &= a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{12} \mathbf{e}_2 + a_{13} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= a'_2 \mathbf{e}'_1 + a'_{22} \mathbf{e}'_2 + a'_{23} \mathbf{e}'_3, & \mathbf{e}'_2 &= a_{21} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2 + a_{23} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= a'_3 \mathbf{e}'_1 + a'_{32} \mathbf{e}'_2 + a'_{33} \mathbf{e}'_3, & \mathbf{e}'_3 &= a_{31} \mathbf{e}_1 + a_{32} \mathbf{e}_2 + a_{33} \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}''_1 &= a'_{11}(a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{12} \mathbf{e}_2 + a_{13} \mathbf{e}_3) + a'_{12}(a_{21} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2 + a_{23} \mathbf{e}_3) + \\ &+ a'_{13}(a_{31} \mathbf{e}_1 + a_{32} \mathbf{e}_2 + a_{33} \mathbf{e}_3) = (a_{11}a'_{11} + a_{21}a'_{12} + a_{31}a'_{13})\mathbf{e}_1 + \\ &+ (a_{12}a'_{11} + a_{22}a'_{12} + a_{32}a'_{13})\mathbf{e}_2 + (a_{13}a'_{11} + a_{23}a'_{12} + a_{33}a'_{13})\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{e}''_2 &= (a_{11}a'_{21} + a_{21}a'_{22} + a_{31}a'_{23})\mathbf{e}_1 + (a_{12}a'_{21} + a_{22}a'_{22} + a_{32}a'_{23})\mathbf{e}_2 + \\ &+ (a_{13}a'_{21} + a_{23}a'_{22} + a_{33}a'_{23})\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}''_3 &= (a_{11}a'_{31} + a_{21}a'_{32} + a_{31}a'_{33})\mathbf{e}_1 + (a_{12}a'_{31} + a_{22}a'_{32} + a_{32}a'_{33})\mathbf{e}_2 + \\ &+ (a_{13}a'_{31} + a_{23}a'_{32} + a_{33}a'_{33})\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_2 &= \begin{pmatrix} a_{11}a'_{11} + a_{21}a'_{12} + a_{31}a'_{13} & a_{11}a'_{21} + a_{21}a'_{22} + a_{31}a'_{23} & a_{11}a'_{31} + a_{21}a'_{32} + a_{31}a'_{33} \\ a_{12}a'_{11} + a_{22}a'_{12} + a_{32}a'_{13} & a_{12}a'_{21} + a_{22}a'_{22} + a_{32}a'_{23} & a_{12}a'_{31} + a_{22}a'_{32} + a_{32}a'_{33} \\ a_{13}a'_{11} + a_{23}a'_{12} + a_{33}a'_{13} & a_{13}a'_{21} + a_{23}a'_{22} + a_{33}a'_{23} & a_{13}a'_{31} + a_{23}a'_{32} + a_{33}a'_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{21} & a'_{31} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{32} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix} = SS_1, \det S_2 = \det S \cdot \det S_1. \blacksquare \end{aligned}$$

**Пример 1.** В пространстве задана некоторая система координат  $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Точки  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(-1; 2; 0)$ ,  $D(0; 0; 2)$  — вершины тетраэдра  $ABCD$ , точки  $K$  и  $L$  — соответственно середины ребер  $[AC]$  и  $[DB]$ . Найдите матрицу перехода  $S_2$  от системы координат  $\{A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\}$  к системе координат  $\{B, \vec{AC}, \vec{KL}, \vec{DB}\}$ . Напишите формулы перехода от первой системы координат ко второй.

► В примере 12 §5 этой главы найдено, что

$$\vec{AC} = 0 \cdot \vec{AB} + 1 \cdot \vec{AC} + 0 \cdot \vec{AD},$$

$$\vec{KL} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{CB}) = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD},$$

$$\vec{DB} = 1 \cdot \vec{AB} + 0 \cdot \vec{AC} - 1 \cdot \vec{AD}, \quad \vec{AB} = 1 \cdot \vec{AB} + 0 \cdot \vec{AC} + 0 \cdot \vec{AD}.$$

Следовательно,

$$x = 0 \cdot x' + \frac{1}{2}y' + z' + 1, \quad y = x' - \frac{1}{2}y' + 0 \cdot z' + 0, \quad z = 0 \cdot x' + \frac{1}{2}y' - z' + 0$$

— формулы перехода от системы координат  $\{A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\}$  к системе координат  $\{B, \vec{AC}, \vec{KL}, \vec{DB}\}$ ,

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

— матрица перехода.

Используя свойство 4° матрицы перехода, матрицу  $S_2$  можно найти и другим способом. Именно: по определению координат точки,

$$\vec{OA} = e_1, \quad \vec{OB} = 2e_2, \quad \vec{OC} = -e_1 + 2e_2, \quad \vec{OD} = 2e_3, \quad \vec{AB} = -e_1 + 2e_2,$$

$$\vec{AC} = -2e_1 + 2e_2, \quad \vec{AD} = -e_1 + 2e_3,$$

отсюда

$$e_1 = \vec{AB} - \vec{AC}, \quad e_2 = \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}, \quad e_3 = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD}.$$

Следовательно, матрица перехода от базиса  $\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\}$  к базису  $\{e_1, e_2, e_3\}$  равна

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Так как  $\vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC}) = e_2, \quad \vec{OL} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OD}) = e_2 + e_3, \quad \vec{KL} = \vec{OL} - \vec{OK}$ , то  $\vec{AC} = -2e_1 + 2e_2, \quad \vec{KL} = e_3, \quad \vec{DB} = \vec{OB} - \vec{OD} = 2e_2 - 2e_3$ .

Таким образом, матрица перехода  $S_1$  от базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$  к базису  $\{\vec{AC}, \vec{KL}, \vec{DB}\}$  есть

$$S_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Согласно свойству 4,

$$\begin{aligned} S_2 &= S \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-2) \\ (-1) \cdot (-2) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 & (-1) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) \\ 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}. \blacksquare \end{aligned}$$

Если на плоскости  $\mathcal{P}$  заданы две системы координат: “старая”  $\{O, e_1, e_2\}$  и “новая”  $\{O', e'_1, e'_2\}$ , причем “новая” система координат задана с помощью “старой” соотношениями

$$e'_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2, \quad e'_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2,$$

$$\vec{OO'} = \alpha e_1 + \beta e_2, \tag{2.67}$$

то для произвольной точки  $M \in \mathcal{P}$  связь между ее координатами  $(x; y)$  в “старой” системе координат и ее координатами  $(x'; y')$  в “новой” системе координат определяется *формулами перехода*:

$$\begin{aligned}x &= a_{11}x' + a_{21}y' + \alpha, \\y &= a_{12}x' + a_{22}y' + \beta.\end{aligned}\quad (2.68)$$

Матрица  $S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ , составленная (по столбцам) из коэффициентов

при  $x'$  и  $y'$  в соотношениях (2.68), называется *матрицей перехода от “старой” системы координат (“старого” базиса) на плоскости к “новой” системе координат (“новому” базису)*. Столбцы матрицы  $S$  составлены из координат векторов  $e'_1$  и  $e'_2$  в “старом” базисе  $\{e_1, e_2\}$  (ср. с (2.67)). Для матрицы  $S$  перехода от “старой” системы координат на плоскости к “новой” выполняются свойства  $1^\circ — 4^\circ$ , в которых вместо матриц третьего порядка стоят соответствующие матрицы второго порядка.

**Пример 2.** В трапеции  $ABCD$  ( $(AD)\parallel(BC)$ ) отношение длин оснований  $|AD|:|BC|$  равно 2,  $O$  — точка пересечения диагоналей  $[AC]$  и  $[BD]$ ,  $O'$  — точка пересечения продолжений боковых сторон  $[AB]$  и  $[CD]$ . Запишите формулы перехода от системы координат  $\{O, \vec{BA}, \vec{CD}\}$  к системе координат  $\{O', \vec{OC}, \vec{OD}\}$ .

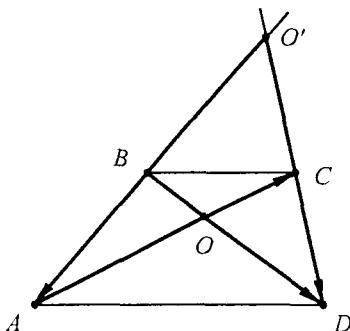


Рис. 2.30

$[DB]$  — его медианы. Поэтому

$$\begin{aligned}\vec{O'A} &= 2\vec{BA}, \quad \vec{O'D} = 2\vec{CD}, \\ \vec{OC} &= \frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{AO'} + \vec{AD})\right) = \frac{1}{6}(\vec{AO'} + (\vec{AO'} + \vec{O'D})) = \\ &= \frac{1}{3}\vec{AO'} + \frac{1}{6}\vec{O'D} = -\frac{2}{3}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{CD}, \quad \vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = -\frac{2}{3}\vec{BA} + \frac{4}{3}\vec{CD}, \\ \vec{O'O'} &= \vec{OC} + \vec{CO'} = \vec{OC} - \vec{CD} = -\frac{2}{3}\vec{BA} - \frac{2}{3}\vec{CD}.\end{aligned}$$

Следовательно, формулы перехода от системы координат  $\{O, \vec{BA}, \vec{CD}\}$  к системе координат  $\{O', \vec{OC}, \vec{OD}\}$  имеют вид:

$$x = -\frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{2}{3}, \quad y = \frac{1}{3}x' + \frac{4}{3}y' - \frac{2}{3}. \quad \blacktriangledown$$

**Пример 3.** На плоскости задана некоторая система координат  $\{O, e_1, e_2\}$ . Точки  $A(1; 1)$ ,  $B(0; -3)$ ,  $C(2; 2)$  — вершины треугольника  $ABC$ . Найдите координаты точки  $N$  пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Запишите формулы перехода от системы координат  $\{N, \vec{NO}, \vec{AC}\}$  к системе координат  $\{O, \vec{AB}, \vec{BC}\}$ .

▲ Координаты  $(x_N; y_N)$  точки  $N$  находим по формуле (2.41):

$$x_N = \frac{1}{3}(1+0+2) = 1, \quad y_N = \frac{1}{3}(1-3+2) = 0,$$

считая, что плоскость треугольника  $ABC$  совпадает с координатной плоскостью  $Oxy$  некоторой пространственной системы координат, т.е. что  $z_A = z_B = z_C = z_N = 0$ .

Найдем формулы перехода от системы координат  $\{N, \vec{NO}, \vec{AC}\}$  на плоскости  $(ABC)$  к системе координат  $\{O, \vec{AB}, \vec{BC}\}$ . Пусть точка  $M$  имеет координаты  $(x^*; y^*)$  в системе координат  $\{N, \vec{NO}, \vec{AC}\}$  и координаты  $(x'; y')$  в системе координат  $\{O, \vec{AB}, \vec{BC}\}$ , т.е.  $\vec{NM} = x^* \vec{NO} + y^* \vec{AC}$ ,  $\vec{OM} = x' \vec{AB} + y' \vec{BC}$ . Воспользовавшись соотношением  $\vec{NM} = \vec{NO} + \vec{OM}$ , применяемым при выводе формул перехода, и разложив все векторы по базису  $\{e_1, e_2\}$ , получим

$$\begin{aligned} x^*(-\vec{ON}) + y^*(\vec{OC} - \vec{OA}) &= -\vec{ON} + x'(\vec{OB} - \vec{OA}) + y'(\vec{OC} - \vec{OB}), \quad \text{или} \\ x^*(-e_1) + y^*((2e_1 + 2e_2) - (e_1 + e_2)) + e_1 - \\ - x'(-3e_2 - (e_1 + e_2)) - y'((2e_1 + 2e_2) + 3e_2) &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Используя линейную независимость векторов  $e_1$  и  $e_2$ , получаем систему уравнений  $-x^* + y^* + 1 + x' - 2y' = 0$ ,  $y^* + 4x' - 5y' = 0$ , решая которую относительно  $x^*$  и  $y^*$ , найдем

$$x^* = -3x' + 3y' + 1, \quad y^* = -4x' + 5y'. \quad \blacktriangledown$$

Об использовании формул перехода при решении содержательных геометрических задач см. пример 14 из §9 этой главы.

### §8. Параллельное проецирование

Рассмотрим в пространстве плоскость  $\mathcal{P}$  и не параллельную ей прямую  $l$  (рис. 2.31). Проекцией  $\Pi'_\mathcal{P}(M)$  точки  $M$  на плоскость  $\mathcal{P}$  параллельно прямой  $l$  называется точка  $M^* \in \mathcal{P}$

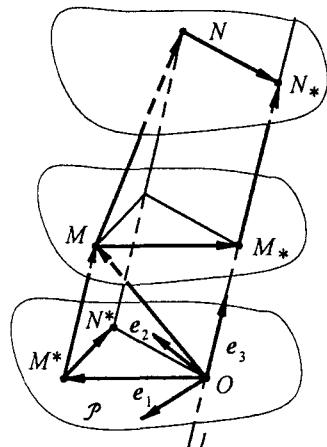


Рис. 2.31  
Если  $e_3 = (0; 0; 1)$  коллинеарны, то

такая, что вектор  $\vec{M^*M}$  параллелен прямой  $l$ . Точка  $M^*$  является (единственной) точкой пересечения плоскости  $\mathcal{P}$  с прямой, проходящей через точку  $M$  и параллельной прямой  $l$ . Пусть  $O$  — точка пересечения прямой  $l$  с плоскостью  $\mathcal{P}$ . Рассмотрим систему координат  $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ , где  $\{e_1, e_2\}$  — базис в плоскости  $\mathcal{P}$ , а вектор  $e_3$  параллелен прямой  $l$ . Пусть  $(x_M; y_M; z_M)$  и  $(x_M^*; y_M^*; z_M^*)$  — соответственно координаты точек  $M$  и  $M^*$  в этой системе координат. Так как векторы

$$\vec{M^*M} = (x_M - x_M^*; y_M - y_M^*; z_M - z_M^*)$$

$$\begin{vmatrix} x_M - x_M^* & y_M - y_M^* \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_M - x_M^* & z_M - z_M^* \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} y_M - y_M^* & z_M - z_M^* \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е.  $x_M = x_M^*$ ,  $y_M = y_M^*$ . Точка  $M^*$  лежит в плоскости  $\mathcal{P} = Oxy$ , поэтому ее третья координата  $z_M^*$  равна нулю. Таким образом, по координатам  $(x_M; y_M; z_M)$  точки  $M$  в данной системе координат координаты точки  $M^* = \Pi'_\mathcal{P}(M)$  находятся по формулам  $x_M^* = x_M$ ,  $y_M^* = y_M$ ,  $z_M^* = 0$ .

Проекцией  $\Pi'_\mathcal{P}(\vec{MN})$  направленного отрезка  $\vec{MN}$  на плоскость  $\mathcal{P}$  параллельно прямой  $l$  называется направленный отрезок  $\vec{M^*N^*}$ , где  $M^* =$