Об использовании формул перехода при решении содержательных геометрических задач см. пример 14 из §9 этой главы.

§8. Параллельное проецирование

Рассмотрим в пространстве плоскость $\mathcal{P}$ и не параллельную ей прямую l (рис. 2.31). *Проекцией* $\Pi^l_{\mathcal{P}}(M)$ *точки* M *на плоскость* $\mathcal{P}$ *параллельно прямой* l называется точка $M^* \in \mathcal{P}$ такая, что вектор $\overrightarrow{M^*M}$ параллелен прямой l. Точка M^* является (единственной) точкой пересечения плоскости $\mathcal{P}$ с прямой, проходящей через точку M и параллельной прямой l. Пусть O — точка пересечения прямой l с плоскостью $\mathcal{P}$. Рассмотрим систему координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, где $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ — базис в плоскости $\mathcal{P}$, а вектор $\boldsymbol{e}_3$ параллелен прямой l. Пусть $(x_M; y_M; z_M)$ и $(x^*_M; y^*_M; z^*_M)$ — соответственно координаты точек M и M^* в этой системе координат. Так как векторы $\overrightarrow{M^*M} = (x_M - x^*_M;\ y_M - y^*_M;\ z_M - z^*_M)$ и $\boldsymbol{e}_3 = (0; 0; 1)$ коллинеарны, то

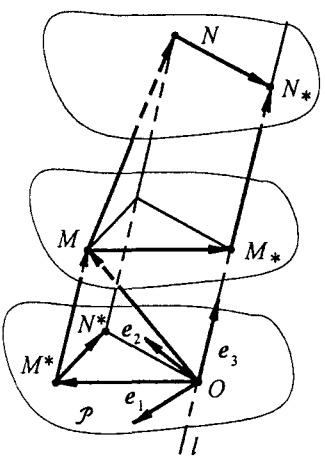

Рис. 2.31

$$\begin{vmatrix} x_M - x^*_M & y_M - y^*_M \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_M - x^*_M & z_M - z^*_M \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_M - y^*_M & z_M - z^*_M \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. $x_M = x^*_M$, $y_M = y^*_M$. Точка M^* лежит в плоскости $\mathcal{P} = Oxy$, поэтому ее третья координата z^*_M равна нулю. Таким образом, по координатам $(x_M; y_M; z_M)$ точки M в данной системе координат координаты точки $M^* = \Pi^l_{\mathcal{P}}(M)$ находятся по формулам $x^*_M = x_M$, $y^*_M = y_M$, $z^*_M = 0$.

Проекцией $\Pi^l_{\mathcal{P}}(\overrightarrow{MN})$ *направленного отрезка* $\overrightarrow{MN}$ *на плоскость* $\mathcal{P}$ *параллельно прямой* l называется направленный отрезок $\overrightarrow{M^*N^*}$, где $M^* =$

$=\Pi^l_{\mathcal{P}}(M)$, $N^*=\Pi^l_{\mathcal{P}}(N)$. Если $M(x_M;y_M;z_M)$, $N(x_N;y_N;z_N)$, т.е. в базисе $\{e_1,e_2,e_3\}$ вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты $(x_N-x_M;\ y_N-y_M;\ z_N-z_M)$, то $\overrightarrow{M^*N^*}=(x_N-x_M;\ y_N-y_M;\ 0)$.

Пусть $\boldsymbol{d}$ *— некоторый вектор. Его проекция* $\boldsymbol{d}^*=\Pi^l_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{d})$ *на плоскость* $\mathcal{P}$ *параллельно прямой* l определяется следующим образом: $\boldsymbol{d}^*=\Pi^l_{\mathcal{P}}(\overrightarrow{MN})$, где M и N — произвольные точки пространства такие, что направленный отрезок $\overrightarrow{MN}$ изображает вектор $\boldsymbol{d}$. Данное определение является корректным, т.е. не зависит от выбора направленного отрезка $\overrightarrow{MN}$, изображающего вектор $\boldsymbol{d}$.

□ Действительно, если $\boldsymbol{d}=\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{MN}$, то $x_L-x_K=x_N-x_M$, $y_L-y_K=$ $=y_N-y_M$, $z_L-z_K=z_N-z_M$, а поэтому

$$\overrightarrow{K^*L^*}=(x_L-x_K;y_L-y_K;0)=(x_N-x_M;y_N-y_M;0)=\overrightarrow{M^*N^*}.\ \blacksquare$$

Если в выбранном выше базисе $\boldsymbol{d}=(d_x;\ d_y;\ d_z)$, т.е. $\overrightarrow{MN}=$ $=(d_x;\ d_y;\ d_z)$, то в этом базисе $\boldsymbol{d}^*=\Pi^l_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{d})=(d_x;\ d_y;\ 0)$.

Операция проецирования вектора на плоскость $\mathcal{P}$ параллельно прямой l является линейной: для любых векторов $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{f}$ и любых чисел α и β справедливо равенство

$$\Pi^l_{\mathcal{P}}(\alpha\boldsymbol{d}+\beta\boldsymbol{f})=\alpha\Pi^l_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{d})+\beta\Pi^l_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{f}). \qquad (2.69)$$

□ Действительно, если в указанном выше базисе $\boldsymbol{d}=(d_x;\ d_y;\ d_z)$, $\boldsymbol{f}=(f_x;\ f_y;\ f_z)$, то $\alpha\boldsymbol{d}+\beta\boldsymbol{f}=(\alpha d_x+\beta f_x;\ \alpha d_y+\beta f_y;\ \alpha d_z+\beta f_z)$. Поэтому

$$\Pi^l_{\mathcal{P}}(\alpha\boldsymbol{d}+\beta\boldsymbol{f})=(\alpha d_x+\beta f_x;\ \alpha d_y+\beta f_y;\ 0).$$

Кроме того,

$$\Pi^l_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{d})=(d_x;\ d_y;\ 0),\ \alpha\Pi^l_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{d})=(\alpha d_x;\ \alpha d_y;\ 0),\ \Pi^l_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{f})=(f_x;\ f_y;\ 0),$$

$$\beta\Pi^l_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{f})=(\beta f_x;\ \beta f_y;\ 0).$$

Также имеем

$$\alpha\Pi^{l}_{\mathcal{P}}(d)+\beta\Pi^{l}_{\mathcal{P}}(f)=(\alpha d_x+\beta f_x;\ \alpha d_y+\beta f_y;\ 0).\ \blacksquare$$

Пример 1 (признак параллельности прямой и плоскости). При каком необходимом и достаточном условии прямая l:

$$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}\quad (a_x^2+a_y^2+a_z^2>0)$$

и плоскость $\mathcal{P}$:

$$Ax+By+Cz+D=0\ \ (A^2+B^2+C^2>0)$$

параллельны?

▲ Прямая l параллельна плоскости $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда плоскости $\mathcal{P}$ параллелен направляющий вектор $\boldsymbol{a}=(a_x;\ a_y;\ a_z)$ прямой l:

$$Aa_x+Ba_y+Ca_z=0 \text{ (см. условие (2.55)).} \ ▼$$

Пример 2. В пространстве заданы плоскость $\mathcal{P}$:

$$Ax+By+Cz+D=0\ \ (A^2+B^2+C^2>0)$$

и прямая l: $\dfrac{x-x_0}{a_x}=\dfrac{y-y_0}{a_y}=\dfrac{z-z_0}{a_z}$ $(a_x^2+a_y^2+a_z^2>0)$. Напишите формулы, связывающие координаты точки $M(x_M;y_M;z_M)$ пространства с координатами ее проекции $M^*(x^*;\ y^*;\ z^*)$ на плоскость $\mathcal{P}$ параллельно прямой l.

▲ Вектор $\boldsymbol{a}=(a_x;\ a_y;\ a_z)$ — направляющий вектор прямой l. По определению проекции найдется число $t=t_M$, зависящее от M, такое, что $\overrightarrow{M^*M}=t\boldsymbol{a}$, или $x_M-x^*=ta_x$, $y_M-y^*=ta_y$, $z_M-z^*=ta_z$, т.е. $x^*=x_M-ta_x$, $y^*=y_M-ta_y$, $z^*=z_M-ta_z$. Координаты $(x^*;\ y^*;\ z^*)$ точки M^* должны удовлетворять уравнению плоскости $\mathcal{P}$:

$$A(x_M-ta_x)+B(y_M-ta_y)+C(z_M-ta_z)+D=0.$$

Учитывая, что $Aa_x+Ba_y+Ca_z\neq 0$ (см. пример 1), находим отсюда:

$$t_M = \frac{Ax_M + By_M + Cz_M + D}{Aa_x + Ba_y + Ca_z};$$

$$x^* = \frac{x_M(Ba_y + Ca_z) - a_x(By_M + Cz_M + D)}{Aa_x + Ba_y + Ca_z}; \qquad (2.70)$$

$$y^* = \frac{y_M(Aa_x + Ca_z) - a_y(Ax_M + Cz_M + D)}{Aa_x + Ba_y + Ca_z};$$

$$z^* = \frac{z_M(Aa_x + Ba_y) - a_z(Ax_M + By_M + D)}{Aa_x + Ba_y + Ca_z}. \quad \blacktriangledown$$

Пример 3. Найдите проекцию вектора $\boldsymbol{b} = (1; 0; -2)$ на плоскость $\mathcal{P}$: $x - 2y + z - 4 = 0$ параллельно прямой l: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{1}$.

▲ Воспользуемся формулами (2.70). Точка $N(0; 0; 4)$ лежит в плоскости $\mathcal{P}$, поэтому $N^* = \Pi^l_{\mathcal{P}}(N) = N$. Возьмем точку $M(1; 0; 2)$ так, чтобы $\overrightarrow{NM} = \boldsymbol{b}$. По формулам (2.70) для точки $M^*(x^*; y^*; z^*) = \Pi^l_{\mathcal{P}}(M)$ имеем:

$$x^* = \frac{1\cdot((-2)\cdot 1 + 1\cdot 1) - 2((-2)\cdot 0 + 1\cdot 2 - 4)}{1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot 1} = 3,$$

$$y^* = \frac{-1\cdot(1\cdot 1 + 1\cdot 2 - 4)}{1} = 1, \quad z^* = 3.$$

Следовательно, $\Pi^l_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{b}) = \overrightarrow{N^*M^*} = (3-0; 1-0; 3-4) = (3; 1; -1)$. ▼

Пример 4*. В тетраэдре $ABCD$ точки D_1, A_1, B_1, C_1 являются точками пересечения медиан соответственно треугольников ABC, BCD, CDA, DAB. Пусть $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$ — соответственно плоскости (ABC), (BCD), (CDA), (DAB); l_1, l_2, l_3, l_4 — прямые (DD_1), (AA_1), (BB_1), (CC_1). Вычислите для произвольного вектора $\boldsymbol{d}$ вектор $\Gamma(\boldsymbol{d}) = \Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\boldsymbol{d}) + \Pi^{l_2}_{\mathcal{P}_2}(\boldsymbol{d}) + \Pi^{l_3}_{\mathcal{P}_3}(\boldsymbol{d}) + \Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\boldsymbol{d})$.

▲ Векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{DA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{DB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{DC}$ не компланарны и образуют базис в пространстве. Вектор $\boldsymbol{d}$ раскладывается по этому базису: $\boldsymbol{d} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$. Поэтому, используя линейность операции проецирования, получаем:

$$\Gamma(\boldsymbol{d}) = \Gamma(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}) = \Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}) +$$

$$+ \Pi^{l_2}_{\mathcal{P}_2}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}) + \Pi^{l_3}_{\mathcal{P}_3}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}) + \Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}) =$$

$$= \{\alpha\Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\boldsymbol{a}) + \beta\Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\boldsymbol{b}) + \gamma\Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\boldsymbol{c})\} + \ \dots \ + \{\alpha\Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\boldsymbol{a}) + \beta\Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\boldsymbol{b}) + \gamma\Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\boldsymbol{c})\} =$$

$$= \alpha\{\Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\boldsymbol{a}) + \Pi^{l_2}_{\mathcal{P}_2}(\boldsymbol{a}) + \Pi^{l_3}_{\mathcal{P}_3}(\boldsymbol{a}) + \Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\boldsymbol{a})\} + \beta\{\Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\boldsymbol{b}) + \ \dots \ + \Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\boldsymbol{b})\} +$$

$$+ \gamma\{\Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\boldsymbol{c}) + \ \dots \ + \Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\boldsymbol{c})\} = \alpha\Gamma(\boldsymbol{a}) + \beta\Gamma(\boldsymbol{b}) + \gamma\Gamma(\boldsymbol{c}).$$

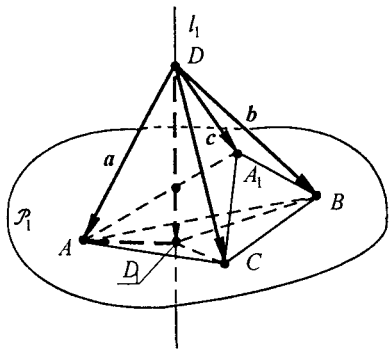

Рис. 2.32

Таким образом, для нахождения $\Gamma(\boldsymbol{d})$ для любого вектора $\boldsymbol{d}$ достаточно знать лишь $\Gamma(\boldsymbol{a})$, $\Gamma(\boldsymbol{b})$ и $\Gamma(\boldsymbol{c})$. Поскольку вектор $\boldsymbol{a}$ параллелен плоскостям $\mathcal{P}_3$ и $\mathcal{P}_4$ (изображающий вектор $\boldsymbol{a}$ направленный отрезок $\overrightarrow{DA}$ лежит в плоскостях $\mathcal{P}_3$ и $\mathcal{P}_4$), $\Pi^{l_3}_{\mathcal{P}_3}(\boldsymbol{a}) = \Pi^{l_4}_{\mathcal{P}_4}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$. В соответствии с результатом примера 12 §5 этой главы

$$\overrightarrow{DD_1} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).$$

Поэтому (рис. 2.32) $\Pi^{l_1}_{\mathcal{P}_1}(\boldsymbol{a}) = \overrightarrow{D_1A} = -\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DA} = \boldsymbol{a} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$. Согласно свойству медиан треугольника BCD, имеем $\Pi^{l_2}_{\mathcal{P}_2}(\boldsymbol{a}) = \overrightarrow{DA_1} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$. Следовательно, $\Gamma(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) + \frac{1}{3}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = \frac{8}{3}\boldsymbol{a}$. Аналогично находим $\Gamma(\boldsymbol{b}) = \frac{8}{3}\boldsymbol{b}$, $\Gamma(\boldsymbol{c}) = \frac{8}{3}\boldsymbol{c}$. Окончательно получаем

$$\Gamma(\boldsymbol{d}) = \alpha\Gamma(\boldsymbol{a}) + \beta\Gamma(\boldsymbol{b}) + \gamma\Gamma(\boldsymbol{c}) = \alpha\frac{8}{3}\boldsymbol{a} + \beta\frac{8}{3}\boldsymbol{b} + \gamma\frac{8}{3}\boldsymbol{c} = \frac{8}{3}\boldsymbol{d}$$

для любого вектора $\boldsymbol{d}$. ▼

Рассмотрим в пространстве прямую l и не параллельную ей плоскость $\mathcal{P}$ (см. рис. 2.31). *Проекцией* $\Pi^{\mathcal{P}}_l(M)$ *точки* M *на прямую* l *параллельно плоскости* $\mathcal{P}$ называется такая точка $M_* \in l$, что вектор $\overrightarrow{MM_*}$ параллелен $\mathcal{P}$. Точка M_* является (единственной) точкой пересечения прямой l с плоскостью, проходящей через точку M и параллельной плоскости $\mathcal{P}$. В системе координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ (см. рис. 2.31), где $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ — базис в плоскости $\mathcal{P}$, $\boldsymbol{e}_3 \parallel l$, $O = l \cap \mathcal{P}$, координаты точки $M_*(x_{*M}; y_{*M}; z_{*M})$

находятся по координатам точки $M(x_M; y_M; z_M)$ из условий $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_*} + \overrightarrow{M_*M}$, $\overrightarrow{OM_*} \parallel \boldsymbol{e}_3$, $\overrightarrow{MM_*} \parallel \mathcal{P}$. В системе координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ плоскость $\mathcal{P}$ имеет уравнение $z = 0$ (плоскость $\mathcal{P}$ проходит через точки с координатами (0; 0; 0), (1; 0; 0) и (0; 1; 0), поэтому ее уравнение

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 0-0 \\ 0-0 & 1-0 & 0-0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow z = 0).$$

Вектор $\overrightarrow{MM_*} = (x_{*M} - x_M;\ y_{*M} - y_M;\ z_{*M} - z_M)$ параллелен плоскости $\mathcal{P}$. Согласно признаку (2.55), получаем

$$0 \cdot (x_{*M} - x_M) + 0 \cdot (y_{*M} - y_M) + 1 \cdot (z_{*M} - z_M) = 0,$$

т.е. $z_{*M} = z_M$. Поскольку точка M_* лежит на оси Oz, первые две ее координаты равны нулю. Таким образом, по заданным координатам $(x_M;\ y_M;\ z_M)$ точки M координаты точки $M_* = \Pi_l^{\mathcal{P}}(M)$ находятся так: $M_*(0; 0; z_M)$.

Проекцией $\Pi_l^{\mathcal{P}}(\overrightarrow{MN})$ *направленного отрезка* $\overrightarrow{MN}$ *на прямую* l *параллельно плоскости* $\mathcal{P}$ называется направленный отрезок $\overrightarrow{M_*N_*}$, где $M_* = \Pi_l^{\mathcal{P}}(M)$, $N_* = \Pi_l^{\mathcal{P}}(N)$. Если $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ и $N(x_N;\ y_N;\ z_N)$, то вектор $\overrightarrow{M_*N_*}$ имеет координаты $(0; 0; z_N - z_M)$.

Пусть $\boldsymbol{d}$ — некоторый вектор. *Проекцией* $\boldsymbol{d}_* = \Pi_l^{\mathcal{P}}(\boldsymbol{d})$ *вектора* $\boldsymbol{d}$ *на прямую* l *параллельно плоскости* $\mathcal{P}$ называется вектор $\boldsymbol{d}_* = \Pi_l^{\mathcal{P}}(\overrightarrow{MN})$, где $\overrightarrow{MN}$ — произвольный направленный отрезок, изображающий вектор $\boldsymbol{d}$. Это определение корректно (не зависит от выбора направленного отрезка $\overrightarrow{MN}$, изображающего вектор $\boldsymbol{d}$). Если в данной системе координат $\boldsymbol{d} = (d_x; d_y; d_z)$, то $\Pi_l^{\mathcal{P}}(\boldsymbol{d}) = (0; 0; d_z)$. Поскольку $\Pi_{\mathcal{P}}^{l}(\boldsymbol{d}) = (d_x;\ d_y;\ 0)$, для любого вектора $\boldsymbol{d}$ выполнено тождество

$$\Pi_l^{\mathcal{P}}(\boldsymbol{d}) + \Pi_{\mathcal{P}}^{l}(\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{d}. \qquad (2.71)$$

Операция проецирования вектора на прямую l параллельно плоскости $\mathcal{P}$ обладает свойством линейности:

$$\Pi_l^{\mathcal{P}}(\alpha d + \beta f) = \alpha \Pi_l^{\mathcal{P}}(d) + \beta \Pi_l^{\mathcal{P}}(f) \tag{2.72}$$

для любых векторов d и f и любых чисел α и β.

Пример 5. В некоторой системе координат заданы плоскость $\mathcal{P}$:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

и точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Напишите уравнение плоскости $\mathcal{P}^*$, параллельной плоскости $\mathcal{P}$ и проходящей через точку M_0.

▲ Уравнение всякой плоскости $\mathcal{P}^*$, параллельной плоскости $\mathcal{P}$, имеет вид

$$Ax + By + Cz + D^* = 0.$$

Константа D^* находится из условия принадлежности точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ искомой плоскости $\mathcal{P}^*$:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D^* = 0, \text{ или } D^* = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Окончательно $\mathcal{P}^*$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. ▼

Пример 6. В некоторой системе координат заданы прямая l: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$ и плоскость $\mathcal{P}$: $2x + y + z + 2 = 0$. Найдите координаты проекции $M_*(x_*; y_*; z_*)$ точки $M(1;2;3)$ на прямую l параллельно плоскости $\mathcal{P}$.

▲ Уравнение плоскости, проходящей через точку M и параллельной плоскости $\mathcal{P}$, имеет вид

$$2 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) + 1 \cdot (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z - 7 = 0$$

(см. пример 5). Точка $M_*(x_*; y_*; z_*) = \Pi_l^{\mathcal{P}}(M)$ является точкой пересечения этой плоскости и прямой l, поэтому ее координаты находятся из системы уравнений

$$2x_* + y_* + z_* - 7 = 0,$$

$$x_* - 1 = \frac{1}{2} y_*, \quad z_* + 1 = -\frac{1}{2} y_* \Leftrightarrow x_* = 3, \quad y_* = 4, \quad z_* = -3. \ ▼$$

Пример 7*. В тетраэдре $ABCD$ точки M, N, Q, K, L, R соответственно середины ребер $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$, $[AC]$, $[AB]$, $[BC]$. Пусть $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$,

$\mathcal{P}_4$, $\mathcal{P}_5$, $\mathcal{P}_6$ — соответственно плоскости (CMB), (ANC), (AQB), (DKB), (DLC), (DRA), а l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6 — прямые (AD), (BD), (CD), (AC), (AB), (BC). Вычислите для произвольного вектора $\boldsymbol{d}$ вектор

$$\Gamma(\boldsymbol{d}) = \Pi_{l_1}^{\mathcal{P}_1}(\boldsymbol{d}) + \Pi_{l_2}^{\mathcal{P}_2}(\boldsymbol{d}) + \Pi_{l_3}^{\mathcal{P}_3}(\boldsymbol{d}) + \Pi_{l_4}^{\mathcal{P}_4}(\boldsymbol{d}) + \Pi_{l_5}^{\mathcal{P}_5}(\boldsymbol{d}) + \Pi_{l_6}^{\mathcal{P}_6}(\boldsymbol{d}).$$

▲ Векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{DA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{DB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{DC}$ образуют базис в пространстве. Вектор $\boldsymbol{d}$ раскладывается по этому базису: $\boldsymbol{d} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$. Используя линейность операции проецирования, имеем

$$\Gamma(\boldsymbol{d}) = \Gamma(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}) = \sum_{j=1}^{6} \Pi_{l_j}^{\mathcal{P}_j}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{6} \left(\alpha\Pi_{l_j}^{\mathcal{P}_j}(\boldsymbol{a}) + \beta\Pi_{l_j}^{\mathcal{P}_j}(\boldsymbol{b}) + \gamma\Pi_{l_j}^{\mathcal{P}_j}(\boldsymbol{c})\right) =$$

$$= \alpha\sum_{j=1}^{6} \Pi_{l_j}^{\mathcal{P}_j}(\boldsymbol{a}) + \beta\sum_{j=1}^{6} \Pi_{l_j}^{\mathcal{P}_j}(\boldsymbol{b}) + \gamma\sum_{j=1}^{6} \Pi_{l_j}^{\mathcal{P}_j}(\boldsymbol{c}) = \alpha\Gamma(\boldsymbol{a}) + \beta\Gamma(\boldsymbol{b}) + \gamma\Gamma(\boldsymbol{c})$$

(ср. с примером 4). Найдем $\Gamma(\boldsymbol{a})$. Так как $\Pi_{l_1}^{\mathcal{P}_1}(A) = A$, $\Pi_{l_1}^{\mathcal{P}_1}(D) = D$, то $\Pi_{l_1}^{\mathcal{P}_1}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$ (рис. 2.33). Так как $\Pi_{l_2}^{\mathcal{P}_2}(A) = N$, $\Pi_{l_2}^{\mathcal{P}_2}(D) = D$, то $\Pi_{l_2}^{\mathcal{P}_2}(\boldsymbol{a}) = \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$. Аналогично имеем $\Pi_{l_3}^{\mathcal{P}_3}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$, $\Pi_{l_4}^{\mathcal{P}_4}(\boldsymbol{a}) = \frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}}{2}$, $\Pi_{l_5}^{\mathcal{P}_5}(\boldsymbol{a}) = \frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}$. Так как $\Pi_{l_6}^{\mathcal{P}_6}(A) = \Pi_{l_6}^{\mathcal{P}_6}(D) = R$, то $\Pi_{l_6}^{\mathcal{P}_6}(\boldsymbol{a}) = \overrightarrow{RR} = \overrightarrow{0}$. Следовательно, $\Gamma(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) + \overrightarrow{0} = 2\boldsymbol{a}$. Аналогично $\Gamma(\boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{b}$, $\Gamma(\boldsymbol{c}) = 2\boldsymbol{c}$. Таким образом, для любого вектора $\boldsymbol{d}$

$$\Gamma(\boldsymbol{d}) = \alpha\Gamma(\boldsymbol{a}) + \beta\Gamma(\boldsymbol{b}) + \gamma\Gamma(\boldsymbol{c}) = \alpha 2\boldsymbol{a} + \beta 2\boldsymbol{b} + \gamma 2\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{d}. \ ▼$$

Рассмотрим в плоскости $\mathcal{P}$ две непараллельные прямые l и L (рис. 2.34). *Проекцией* $\Pi_l^L(M)$ *точки* $M \in \mathcal{P}$ *на прямую* l *параллельно прямой* L называется такая точка $M_1 \in l$, что вектор $\overrightarrow{MM_1}$ параллелен L. Точка M_1 является (единственной) точкой пересечения прямой l с прямой, проходящей через точку M и параллельной прямой L. Пусть M и N —

точки плоскости $\mathcal{P}$. *Проекцией* $\Pi_l^L(\overrightarrow{MN})$ *направленного отрезка* $\overrightarrow{MN}$ *на прямую* l *параллельно прямой* L называется направленный отрезок $\overrightarrow{M_1N_1}$,

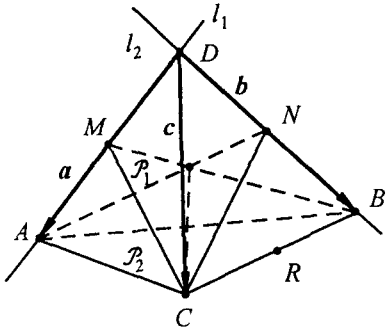

Рис. 2.33

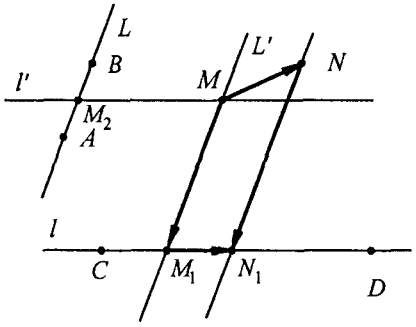

Рис. 2.34

где $M_1 = \Pi_l^L(M)$, $N_1 = \Pi_l^L(N)$. Пусть $\boldsymbol{d}$ — некоторый вектор, параллельный плоскости $\mathcal{P}$. *Его проекцией* $\Pi_l^L(\boldsymbol{d})$ *на прямую* l *параллельно прямой* L называется вектор $\boldsymbol{d}^* = \Pi_l^L(\overrightarrow{MN})$, где $\overrightarrow{MN}$ — направленный отрезок, изображающий вектор $\boldsymbol{d}$, начало M и конец N которого лежат в плоскости $\mathcal{P}$. Определение проекции вектора на прямую параллельно другой прямой в плоскости корректно (не зависит от выбора направленного отрезка, изображающего вектор). Операция проецирования вектора на прямую l параллельно прямой L в плоскости $\mathcal{P}$ является линейной:

$$\Pi_l^L(\alpha\boldsymbol{d} + \beta\boldsymbol{f}) = \alpha\Pi_l^L(\boldsymbol{d}) + \beta\Pi_l^L(\boldsymbol{f})$$

для любых векторов $\boldsymbol{d} \parallel \mathcal{P}$ и $\boldsymbol{f} \parallel \mathcal{P}$ и любых чисел α и β. Справедливо тождество

$$\boldsymbol{d} = \Pi_l^L(\boldsymbol{d}) + \Pi_L^l(\boldsymbol{d}).$$

Пример 8. Проверьте, что прямые

$$l\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{1} \text{ и } L\colon \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}$$

лежат в одной плоскости и не параллельны. Найдите проекцию точки $M(0;\ -4;\ -7)$ на прямую l параллельно прямой L.

▲ Прямые l и L не параллельны, поскольку их направляющие векторы $\boldsymbol{b} = (1;\ -3;\ 1)$ и $\boldsymbol{c} = (1;-1;3)$ не коллинеарны:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Проверим, что эти прямые пересекаются (и, следовательно, лежат в одной плоскости). Для этого убедимся в том, что система уравнений $x-2=(y+2)/(-3)$, $z-3=(y+2)/(-3)$, $x=-y+2$, $z=-3(y-2)-1$ имеет решение. Из первых трех уравнений находим: $x=1$, $y=1$, $z=2$. Подставляя найденные значения переменных x, y, z в четвертое уравнение, получаем, что $2=-3(1-2)-1$, т.е. это уравнение также удовлетворяется. Таким образом, прямые l и L пересекаются в точке $N(1;\ 1;\ 2)$.

Найдем $\Pi_l^L(M)$. Для этого через точку $M(0;\ -4;\ -7)$ проведем прямую, параллельную L. Уравнения этой прямой $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z+7}{3}$. Точка $\Pi_l^L(M)$ лежит на данной прямой и на прямой l, поэтому ее координаты находятся из следующей системы уравнений: $x=-y-4$, $z+7=$ $=-3(y+4)$, $x-2=-(y+2)/3$, $z-3=-(y+2)/3$. Из первых трех уравнений находим: $x=4$, $y=-8$, $z=5$. Четвертому уравнению найденные значения переменных x, y, z также удовлетворяют. Следовательно, $\Pi_l^L(M)$ имеет координаты $(4;\ -8;\ 5)$. ▼

Пример 9. На плоскости заданы четыре точки: $A(1;2)$, $B(2;5)$, $C(1;-1)$, $D(3;\ -7)$. Пусть $L=(AB)$, $l=(CD)$. Найдите такую точку M, что точка $M_1=\Pi_l^L(M)$ делит $[CD]$ в отношении $1:3$, считая от точки C, а точка $M_2=\Pi_L^l(M)$ является серединой $[AB]$.

▲ По формулам деления отрезка в заданном отношении точка M_1 имеет координаты $x_1=\dfrac{x_C+(1/3)x_D}{1+1/3}=\dfrac{3}{2}$, $y_1=\dfrac{(-1)+(1/3)(-7)}{1+1/3}=-\dfrac{5}{2}$, точка M_2 — координаты $x_2=\dfrac{3}{2}$, $y_2=\dfrac{7}{2}$. Обозначим $l'=(MM_2)$, $L'=(MM_1)$ (рис. 2.34). По определению проекции, $l' \| l$, $L' \| L$. Следовательно, $\overrightarrow{AB}=(1;3)$ — направляющий вектор прямой L', проходящей через

точку $M_1(3/2;-5/2)$. Поэтому уравнение L':

$$\frac{x-3/2}{1}=\frac{y+5/2}{3} \Leftrightarrow 3x-y-7=0.$$

Направляющим вектором прямой l' является вектор $\overrightarrow{CD}=(2;\ -6)$, $M_2 \in l'$. Следовательно, уравнение l':

$$\frac{x-3/2}{2}=\frac{y-7/2}{-6} \Leftrightarrow 3x+y-8=0.$$

Решая систему уравнений $3x-y-7=0$, $3x+y-8=0$, находим координаты $x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ точки M, являющейся точкой пересечения прямых l' и L'. ▼

§9. Некоторые примеры

Пример 1. Дан треугольник ABC. Укажите такую точку M, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$.

▲ Так как $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}$, то $(-\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM})-3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM})=\overrightarrow{AB}$, или $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AC}$, т.е. точка M лежит на продолжении стороны $[AC]$ за точку C, причем $|AM|=3|AC|$. ▼

Пример 2. Докажите, что для любого конечного набора точек A_1, $A_2,\ldots,A_n$ (в пространстве или на плоскости) найдется, и притом единственная, точка M такая, что $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_n}=\vec{0}$. Укажите положение точки M в следующих частных случаях: 1) $A_1A_2A_3$ — треугольник; 2) $A_1A_2A_3A_4$ — пространственный или плоский четырехугольник; 3) $A_1A_2\ldots A_n$ — правильный (плоский) n-угольник.

▲ Зафиксируем некоторый полюс O. Для любой точки M выполнены равенства

$$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_n}=(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OM})+(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OM})+\ldots+(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OM})=$$
$$=(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n})-n\overrightarrow{OM}.$$