Числа z и t не равны нулю: если $z = 0$ $(t = 0)$, то из (3.22) следует, что $t = 0$ $(z = 0)$, следовательно (см. (3.21)), $x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = \vec{0}$, $x^2 + y^2 > 0$, т.е. векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ коллинеарны, что невозможно. Векторы $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{a}$ противоположно направлены. Следовательно, z и t имеют одинаковые знаки (см. (3.22)). Аналогично доказывается, что x и t (y и t) имеют одинаковые знаки. Таким образом, все шесть чисел xy, xz, xt, yz, yt, zt положительны.

Если теперь предположить, что все углы $\alpha_i < \arccos(-1/3)$, т.е. $\cos\alpha_i > -1/3$, $i = 1, 2, ..., 6$, то $2xy(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 2xy\cos\alpha_1 > -(2/3)xy$. Аналогично, $2xz(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 2xz\cos\alpha_2 > -(2/3)xz$, $2xt(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_4) > -(2/3)xt$, $2yz(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) > -(2/3)yz$, $2yt(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4) > -(2/3)yt$, $2zt(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4) > -(2/3)zt$. Поэтому из формулы (3.21) находим

$$0 = (x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 + t\boldsymbol{e}_4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(xy(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + xz(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) +$$
$$+ xt(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_4) + yz(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) + yt(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4) + zt(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)) > x^2 + y^2 + z^2 + t^2 -$$
$$-(2/3)(xy + xz + xt + yz + yt + zt) =$$
$$= (1/3)((x-y)^2 + (x-z)^2 + (x-t)^2 + (y-z)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2) \geq 0.$$

Получено противоречие. ▼

§3. Ортогональное проецирование в пространстве. Нормальное векторное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть l — некоторая прямая в пространстве. *Ортогональной проекцией* $\text{Пр}_l M$ *точки* M *пространства на прямую* l называется точка $M^* = \Pi_l^{\mathcal{P}}(M)$, где $\mathcal{P}$ — плоскость, перпендикулярная прямой l. Иначе говоря, $M^* = M$, если $M \in l$, и M^* — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l, если $M \notin l$. Пусть $\boldsymbol{a}$ — некоторый вектор. По определению, *ортогональной проекцией вектора* $\boldsymbol{a}$ *на прямую* l называется вектор $\text{Пр}_l \boldsymbol{a} = \Pi_l^{\mathcal{P}}(\boldsymbol{a})$. Найдем явное выражение для $\text{Пр}_l \boldsymbol{a}$. Выберем на прямой l точку M и отложим от нее вектор $\overrightarrow{MN} = \boldsymbol{a}$

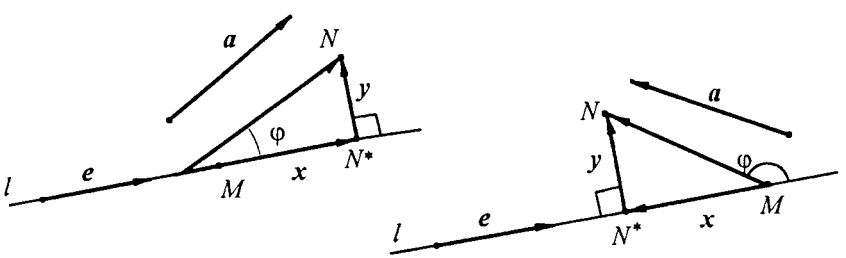
(рис. 3.21,а,б). Тогда $\text{Пр}_l \boldsymbol{a} = \overrightarrow{MN^*}$, где $N^* = \text{Пр}_l N$. Обозначив $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{MN^*}$, $\boldsymbol{y} = \overrightarrow{N^*N}$, получим

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}. \tag{3.23}$$

Пусть $\boldsymbol{e}$ — направляющий вектор прямой l. Тогда $\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{e}$. Для нахождения λ умножим обе части равенства (3.23) скалярно на $\boldsymbol{e}$ и учтем, что по определению ортогональной проекции точки $N(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}) = 0$. Имеем $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}) = \lambda(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e})$, т.е.

$$\text{Пр}_l \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{e} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e})}{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e})} \boldsymbol{e}, \tag{3.24}$$

$$|\text{Пр}_l \boldsymbol{a}| = \left| \frac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{e}|\cos\varphi}{|\boldsymbol{e}||\boldsymbol{e}|} \boldsymbol{e} \right| = |\boldsymbol{a}||\cos\varphi| = \frac{|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e})|}{|\boldsymbol{e}|}. \tag{3.25}$$



а) $0 \le \varphi \le 90°$ б) $90° < \varphi \le 180°$

Рис. 3.21

Пусть $\mathcal{P}$ — некоторая плоскость в пространстве. *Ортогональной проекцией* $\text{Пр}_{\mathcal{P}} M$ *точки* M *на плоскость* $\mathcal{P}$ называется точка $M^* = \Pi^l_{\mathcal{P}}(M)$, где l — прямая, перпендикулярная плоскости $\mathcal{P}$. Таким образом, $M^* = M$, если $M \in \mathcal{P}$; M^* — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость $\mathcal{P}$, если $M \notin \mathcal{P}$. Если $\boldsymbol{n} \ne \vec{0}$ — вектор, перпендикулярный $\mathcal{P}$ (т.е. направляющий вектор прямой l), то в силу равенства

$$\boldsymbol{a} = \Pi^l_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{a}) + \Pi^{\mathcal{P}}_l(\boldsymbol{a})$$

и формулы (3.24) получаем

$$\text{Пр}_{\mathcal{P}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}, \tag{3.26}$$

где $\text{Пр}_{\mathcal{P}}\boldsymbol{a}$ — *ортогональная проекция вектора* $\boldsymbol{a}$ *на плоскость* $\mathcal{P}$, т.е. вектор

$$\text{Пр}_{\mathcal{P}}\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\text{Пр}_{\mathcal{P}}M\ \text{Пр}_{\mathcal{P}}N}, \quad \overrightarrow{MN} = \boldsymbol{a}.$$

Пример 1. Длина ребра основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Точки M, N, P и Q являются соответственно серединами ребер $[AB]$, $[AC]$, $[A_1C_1]$ и $[C_1B_1]$. Длина проекции вектора $\overrightarrow{MP}$ на прямую (NQ) равна $a/4$. Найдите длину высоты призмы.

▲ По условию, $|\text{Пр}_{(NQ)}\overrightarrow{MP}|^2 = (\overrightarrow{MP},\overrightarrow{NQ})^2/|\overrightarrow{NQ}|^2 = a^2/16$ (см. формулу (3.25)). Возьмем в качестве базисных векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{BB_1}$. Тогда $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = a$, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = a^2/2$, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 0$ (призма правильная). Искомая длина $h = |\boldsymbol{c}|$. Так как $\overrightarrow{MP} = (1/2)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{NQ} = -(1/2)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$, то $(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{NQ}) = -(1/4)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}^2 = h^2 - a^2/8$, $|\overrightarrow{NQ}|^2 = (1/4)\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{c}^2 = h^2 + a^2/4$. Следовательно, для величины $x = h^2$ имеем уравнение

$$(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{NQ})^2 = (x - a^2/8)^2 = (a^2/16)(x + a^2/4) = (a^2/16)|\overrightarrow{NQ}|^2,$$

или $x^2 - (5/16)a^2x = 0$. Так как $x \neq 0$, то $h^2 = (5/16)a^2$, т.е. $h = a\sqrt{5}/4$. ▼

Пример 2 (нормальное векторное уравнение плоскости). Пусть в пространстве фиксирован полюс O, выбраны число D и ненулевой вектор $\overrightarrow{N}$. Докажите, что множество $\mathcal{P}$ всех точек, радиус-векторы $\boldsymbol{r}$ которых удовлетворяют уравнению

$$(\boldsymbol{r},\overrightarrow{N}) = D, \tag{3.27}$$

есть плоскость. Укажите ее расположение в пространстве.

□ Рассмотрим точку A с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_A = D\vec{N}/|\vec{N}|^2$ (рис. 3.22). Так как $(\boldsymbol{r}_A, \vec{N}) = D(\vec{N}, \vec{N})/|\vec{N}|^2 = D$, то $A \in \mathcal{P}$. Обозначим через l прямую с направляющим вектором $\vec{N}$, проведенную через точку A. Пусть M — произвольная точка плоскости $\mathcal{P}$ с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_M$. Равенство $(\boldsymbol{r}_M, \vec{N}) = D$, эквивалентное равенству $(\boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_A, \vec{N}) = 0$, выполнено тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_A = \vec{AM} \perp \vec{N}$. Таким образом, точка M принадлежит множеству $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда она расположена на некоторой прямой, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l. Но множество $\mathcal{P}$ всех таких прямых заполняет плоскость, проходящую через точку A и перпендикулярную l. ■

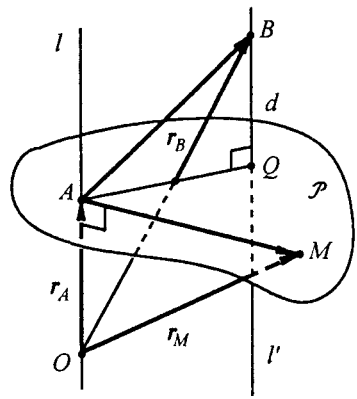


Рис. 3.22

Итак, (3.27) — уравнение некоторой плоскости $\mathcal{P}$ в пространстве. Это уравнение называется *нормальным (векторным) уравнением плоскости* $\mathcal{P}$. Вектор $\vec{N}$ называют *нормальным вектором плоскости* $\mathcal{P}$ и говорят, что $\vec{N}$ ортогонален (перпендикулярен) плоскости $\mathcal{P}$ (или, что плоскость $\mathcal{P}$ ортогональна вектору $\vec{N}$). Подчеркнем еще раз, что когда говорят, что плоскость $\mathcal{P}$ задана уравнением (3.27), подразумевают (хотя и не оговаривают особо), что в пространстве фиксирован полюс, от которого отсчитываются радиус-векторы $\boldsymbol{r}$ точек плоскости $\mathcal{P}$, удовлетворяющие равенству (3.27).

Всякая плоскость $\mathcal{P}$ может быть задана нормальным векторным уравнением. Для этого необходимо зафиксировать полюс O, некоторую точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ плоскости $\mathcal{P}$ и направляющий вектор $\vec{N} \neq \vec{0}$ прямой l, перпендикулярной $\mathcal{P}$. Поскольку точка $M(\boldsymbol{r})$ лежит в плоскости $\mathcal{P}$ тогда и только тогда (по свойству перпендикуляра l к плоскости $\mathcal{P}$), когда векторы $\vec{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ и $\vec{N}$ ортогональны, $M \in \mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \vec{N}) = 0. \qquad (3.28)$$

Очевидно, что (3.28) переходит в (3.27), если обозначать $D = (\boldsymbol{r}_0, \vec{N})$.

Уравнение $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$, где $|\boldsymbol{n}| = 1$, называется *нормированным (векторным) уравнением плоскости.*

Пример 3. Найдите расстояние d от точки B с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_B$ до плоскости $\mathcal{P}$, заданной уравнением $(\boldsymbol{r}, \vec{N}) = D$.

▲ Пусть Q — основание перпендикуляра l', опущенного из точки B на плоскость $\mathcal{P}$ (рис. 3.22), A — точка с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_A = D\vec{N}/|\vec{N}|^2$. Тогда $\vec{N}$ — направляющий вектор l' и по формуле (3.25) имеем

$$d = |\text{Пр}_{l'}\, \vec{AB}| = \frac{|(\vec{AB}, \vec{N})|}{|\vec{N}|} = \frac{|(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A, \vec{N})|}{|\vec{N}|}.$$

Окончательно

$$d = \frac{|(\boldsymbol{r}_B, \vec{N}) - D|}{|\vec{N}|}. \ ▼ \qquad (3.29)$$

Пример 4. Найдите ортогональную проекцию точки $B(\boldsymbol{r}_B)$ на плоскость $\mathcal{P}$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}) = D$.

▲ Как отмечалось в примере 3, точки $Q = \text{Пр}_{\mathcal{P}} B$ и $A(D\vec{N}/|\vec{N}|^2)$ связаны соотношением

$$\vec{BQ} = \text{Пр}_{l'}\, \vec{BA} = \frac{(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B, \vec{N})}{|\vec{N}|^2}\vec{N} = \frac{D - (\boldsymbol{r}_B, \vec{N})}{|\vec{N}|^2}\vec{N}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{r}_B + \vec{BQ} = \boldsymbol{r}_B + \frac{D - (\boldsymbol{r}_B, \vec{N})}{|\vec{N}|^2}\vec{N}. \ ▼$$

Пример 5. Найдите расстояние δ от точки M с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_M$ до прямой l, параметрическое уравнение которой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$.

▲ Пусть $M^* = \text{Пр}_l M$, M_0 — точка прямой l с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_0$. Тогда (рис. 3.23)

$$\overrightarrow{M_0M^*} = \text{Пр}_l\, \overrightarrow{M_0M} = (\overrightarrow{M_0M}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} / (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}),$$

$$\overrightarrow{M^*M} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0M^*} = \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} / (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}),$$

где $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_0$. Таким образом,

$$\delta = |\overrightarrow{M^*M}| = \left| \boldsymbol{b} - \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} \right| =$$

$$= \sqrt{\boldsymbol{b}^2 - 2\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}{\boldsymbol{a}^2} + \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}{(\boldsymbol{a}^2)^2}\boldsymbol{a}^2} =$$

$$= \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\sqrt{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2} =$$

$$= \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\, |\boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_0|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_0)^2}. \ ▼$$

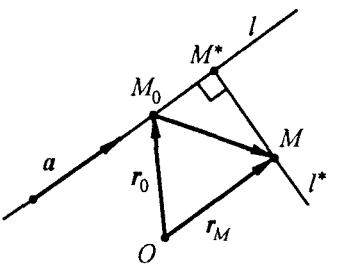


Рис. 3.23

Пример 6. Напишите параметрическое векторное уравнение прямой l^*, являющейся проекцией (ортогональной) прямой l: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$ на плоскость $\mathcal{P}$: $(\boldsymbol{r}, \vec{N}) = D$.

▲ Пусть M — произвольная точка прямой l, $\boldsymbol{r}_M = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$ — ее радиус-вектор, Q — ортогональная проекция точки M на плоскость $\mathcal{P}$. По формуле, полученной в примере 4,

$$\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{r}_M + \frac{D - (\boldsymbol{r}_M, \vec{N})}{|\vec{N}|^2}\vec{N} = \left(\boldsymbol{r}_0 + \frac{D - (\boldsymbol{r}_0, \vec{N})}{|\vec{N}|^2}\vec{N} \right) + \left(\boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a}, \vec{N})}{|\vec{N}|^2}\vec{N} \right) t.$$

Когда t пробегает все вещественные значения, точка M пробегает всю прямую l, а соответствующая точка Q — всю прямую l^*. Следовательно,

$$\boldsymbol{r} = \left(\boldsymbol{r}_0 + \frac{D - (\boldsymbol{r}_0, \vec{N})}{|\vec{N}|^2}\vec{N} \right) + \boldsymbol{b}t,$$

где $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - \dfrac{(\boldsymbol{a}, \vec{N})}{|\vec{N}|^2}\vec{N}$, $t \in R$, — параметрическое уравнение прямой l^*. ▼

Пример 7. Найдите ортогональную проекцию точки $M(\boldsymbol{r}_M)$ на прямую l: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$.

▲ Сохраняя обозначения примера 5 (рис. 3.23), имеем

$$\boldsymbol{r}_{M^*} = \boldsymbol{r}_{M_0} + \overrightarrow{M_0M^*} = \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\overrightarrow{M_0M},\boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}. \ ▼$$

Пример 8. Напишите уравнение прямой l^*, проходящей через точку $M(\boldsymbol{r}_M)$ и пересекающей ортогональную прямую l: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$, не содержащую точку M.

▲ Уравнение l^* есть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_M + \boldsymbol{b}t$, где $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{MM^*}$, $M^* = \text{Пр}_l M$ (рис. 3.23). По формуле, приведенной в примере 7,

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}_{M^*} - \boldsymbol{r}_M = -\boldsymbol{r}_M + \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}. \ ▼$$

Пример 9. Длина ребра основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Уравнения плоскостей (AA_1B_1B) и (AA_1C_1C) таковы: $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}_1) = D_1$ и $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}_2) = D_2$, где $|\boldsymbol{n}_1| = |\boldsymbol{n}_2| = 1$, $(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2) = -1/2$. Напишите нормальное векторное уравнение плоскости (BB_1C_1C).

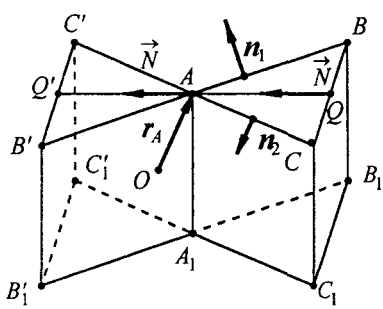


Рис. 3.24

▲ Нормальный вектор $\vec{N}$ плоскости (BB_1C_1C) коллинеарен биссектрисе $[AQ]$ угла $\angle BAC$ (рис. 3.24), поэтому можно взять

$$\vec{N} = \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2,$$

$$|\vec{N}| = \sqrt{(\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2)} = \sqrt{1 + 2(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2) + 1} = 1.$$

Следовательно, уравнение плоскости (BB_1C_1C) имеет вид

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2) = D.$$

Осталось найти D. Расстояние $d = |AQ| = a\sqrt{3}/2$ от точки A до плоскости (BB_1C_1C) определяется формулой (3.29):

$$d = \frac{|(\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2) - D|}{|\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2|} = |(\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2) - D|.$$

Отсюда $D = (\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{n}_1) + (\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{n}_2) \pm a\sqrt{3}/2$. Так как точка A лежит в плоскости (AA_1B_1B), то $(\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{n}_1) = D_1$. Аналогично, $(\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{n}_2) = D_2$. Таким образом, задача имеет два решения: $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2) = D_1 + D_2 + a\sqrt{3}/2$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2) = D_1 + D_2 - a\sqrt{3}/2$, — соответствующие двум возможным расположениям призм $ABCA_1B_1C_1$ и $AB'C'A_1B_1'C_1'$ (рис. 3.24). ▼

Пример 10. Напишите уравнение прямой, пересекающей ортогонально две непараллельные прямые l: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$ и L: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{b}\tau$.

▲ Задача эквивалентна следующей: найти точки $M_0 \in l$ и $M_1 \in L$ такие, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ ортогонален как вектору $\boldsymbol{a}$, так и вектору $\boldsymbol{b}$. Прямая, проходящая через точку M_0, с направляющим вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$ является искомой. Остается найти числа t_0 и τ_1 такие, что векторы $\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t_0$ и $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{b}\tau_1$ являются радиус-векторами искомых точек M_0 и M_1 соответственно. Эти числа находим из условий ортогональности:

$$(\overrightarrow{M_0M_1}, \boldsymbol{a}) = (\overrightarrow{M_0M_1}, \boldsymbol{b}) = 0, \text{ или } (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{b}\tau_1 - \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{a}t_0, \boldsymbol{a}) = 0,$$
$$(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{b}\tau_1 - \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{a}t_0, \boldsymbol{b}) = 0.$$

Перепишем эту систему уравнений в виде

$$t_0\boldsymbol{a}^2 - \tau_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha, \quad t_0(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - \tau_1\boldsymbol{b}^2 = \beta, \tag{3.30}$$

где $\alpha = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})$, $\beta = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{b})$. Решение системы (3.30)

$$t_0 = \frac{-\beta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \alpha\boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}, \quad \tau_1 = \frac{\alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - \beta\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}.$$

Таким образом, уравнение искомой прямой

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}\boldsymbol{a} +$$
$$+\left(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}\boldsymbol{b} -\right.$$
$$\left.-\frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}\boldsymbol{a}\right)t, \quad t \in \mathbf{R}. \ ▼$$