

**§4. Ортонормированный базис. Прямоугольная декартова система координат. Нормальное уравнение прямой на плоскости. Ортогональное проецирование на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Прямая на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве**

Три единичных попарно перпендикулярных вектора, взятых в определенном порядке, называются *ортонормированным* (или *прямоугольным*) *базисом в пространстве*. Векторы прямоугольного базиса принято обозначать  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ . Каждый вектор  $\mathbf{a}$  единственным образом представляется в виде  $\mathbf{a} = xi + yj + zk$ . Числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  называются *координатами вектора  $\mathbf{a}$  в базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$* . Если  $\mathbf{a} = xi + yj + zk$ , то пишут  $\mathbf{a} = (x; y; z)$ .

Например,  $\mathbf{i} = (1; 0; 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0; 1; 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0; 0; 1)$ ,  $\vec{0} = (0; 0; 0)$  и т.д. Координаты векторов в ортонормированном базисе обладают свойством линейности: для любых векторов  $\mathbf{a} = (x_1; y_1; z_1)$  и  $\mathbf{b} = (x_2; y_2; z_2)$  и чисел  $\alpha$  и  $\beta$

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = (\alpha x_1 + \beta x_2; \alpha y_1 + \beta y_2; \alpha z_1 + \beta z_2).$$

Из единственности разложения вектора по базису следует, что векторное равенство  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  равносильно системе трех скалярных равенств  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ ,  $z_1 = z_2$ .

Скалярное произведение векторов  $\mathbf{a} = (x_1; y_1; z_1)$  и  $\mathbf{b} = (x_2; y_2; z_2)$  равно сумме произведений соответствующих координат:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (3.31)$$

Длина вектора  $\mathbf{a}$  равна  $|\mathbf{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ .

□ Действительно, поскольку  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = (\mathbf{i}, \mathbf{k}) = (\mathbf{j}, \mathbf{k}) = 0$ ,  $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$ , по формуле (3.14),

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}, x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}) = \\ &= x_1 x_2 \mathbf{i}^2 + y_1 y_2 \mathbf{j}^2 + z_1 z_2 \mathbf{k}^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)(\mathbf{i}, \mathbf{j}) + (x_1 z_2 + x_2 z_1)(\mathbf{i}, \mathbf{k}) + \\ &\quad + (y_1 z_2 + y_2 z_1)(\mathbf{j}, \mathbf{k}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \end{aligned}$$

Из формулы (3.31) следует, что  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ , т.е.  $|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ . ■

Всюду в этом параграфе считаем, что координаты векторов заданы в ортонормированном базисе, не оговаривая этого особо.

**Пример 1.** Найдите координаты и длину вектора  $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ , если  $\mathbf{a} = (0; -2; -3)$ ,  $\mathbf{b} = (3; 2; 3)$ .

▲ Согласно свойству линейности координат,  $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = (3 \cdot 0 + 2 \cdot 3; 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 2; 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 3) = (6; -2; -3)$ . Поэтому

$$|3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = 7. \quad \blacktriangledown$$

**Пример 2.** Найдите, при каких значениях  $m$  векторы  $\mathbf{a} = (m; -2; 1)$  и  $\mathbf{b} = (m; m; -3)$  ортогональны.

▲ Имеем  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow 0 = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = m \cdot m + (-2) \cdot m + 1 \cdot (-3) = m^2 - 2m - 3 \Leftrightarrow (m = -1 \text{ или } m = 3)$ . ▼

**Пример 3.** Найдите координаты единичного вектора  $\mathbf{e}$ , противоположно направленного вектору  $\mathbf{a} = (2; -2; 1)$ .

$$\blacktriangle | \mathbf{a} | = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3; \mathbf{e} = -\mathbf{a} / | \mathbf{a} | = (-2/3; 2/3; -1/3). \quad \blacktriangledown$$

**Пример 4.** Найдите угол между векторами  $\mathbf{a} = (1; 2; 2)$  и  $\mathbf{b} = (-1; 0; -1)$ .

$$\blacktriangle \cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, (\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}) = 135^\circ. \quad \blacktriangledown$$

Если  $\{i, j, k\}$  — ортонормированный базис, то система координат  $\{O, i, j, k\}$  называется *прямоугольной*. Если  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$  — точки, заданные своими координатами в прямоугольной системе, то

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1),$$

$$|\vec{AB}| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

**Пример 5.** В треугольнике с вершинами в точках  $A(3; 2; -3)$ ,  $B(4; 3; -3)$ ,  $C(3; 1; -4)$  найдите величину угла  $\hat{A}$  и длину медианы  $[AN]$ .

▲ Так как  $\hat{A}$  — угол между векторами  $\vec{AB} = (4 - 3; 3 - 2; -3 - (-3)) = (1; 1; 0)$  и  $\vec{AC} = (0; -1; -1)$ , то  $\cos \hat{A} = (\vec{AB}, \vec{AC}) / (|\vec{AB}| |\vec{AC}|) = (1) / (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) =$

$$= -1/2, \text{ т.е. } \hat{A} = 120^\circ. \text{ Вектор } \vec{AN} = (1/2)(\vec{AB} + \vec{AC}) = (1/2; 0; -1/2), \\ |\vec{AN}| = \sqrt{(1/2)^2 + (-1/2)^2} = 1/\sqrt{2}. \blacksquare$$

Два единичных взаимно перпендикулярных вектора, параллельных плоскости  $\mathcal{P}$ , взятые в определенном порядке, называются *ортонормированным (прямоугольным) базисом в плоскости  $\mathcal{P}$* . Векторы ортонормированного базиса принято обозначать  $i, j$ . Каждый вектор  $a$ , параллельный плоскости  $\mathcal{P}$ , единственным образом представляется в виде  $a = xi + yj$ . Числа  $x, y$  называют *координатами вектора  $a$  в базисе  $\{i, j\}$*  и пишут  $a = (x; y)$ . Если  $a = (x_1; y_1)$  и  $b = (x_2; y_2)$ , то для любых чисел  $\alpha$  и  $\beta$   $\alpha a + \beta b = (\alpha x_1 + \beta x_2; \alpha y_1 + \beta y_2)$ ,  $(a, b) = x_1 x_2 + y_1 y_2$ ,  $|a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ . Равенство  $a = b$  эквивалентно системе равенств  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ . Если  $O \in \mathcal{P}$ , а  $\{i, j\}$  — ортонормированный базис в плоскости  $\mathcal{P}$ , то система координат  $\{O, i, j\}$  на плоскости  $\mathcal{P}$  называется *прямоугольной*. Если  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  — точки плоскости  $\mathcal{P}$ , заданные своими координатами в прямоугольной системе координат, то  $\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ ,  $|\vec{AB}| = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

**Пример 6.** Даны точка  $A(-1; 2)$  и вектор  $a = (3; -4)$ . Найдите координаты таких точек  $B$  и  $C$ , что  $\vec{AB} = a$ ,  $\vec{AC} \perp a$  и  $|\vec{AC}| = |a|$ .

▲ Пусть  $B(x; y)$ . Тогда  $\vec{AB} = (x + 1; y - 2)$ , и если  $a = \vec{AB}$ , то  $3 = x + 1$ ,  $-4 = y - 2$ , т.е.  $x = 2$ ,  $y = -2$ . Итак, точка  $B$  имеет координаты  $(2; -2)$ . Пусть  $C(\tilde{x}; \tilde{y})$ . Тогда  $\vec{AC} = (\tilde{x} + 1; \tilde{y} - 2)$ . Так как  $(\vec{AC}, a) = 3(\tilde{x} + 1) - 4(\tilde{y} - 2) = 0$ , то  $\tilde{x} = (4/3)\tilde{y} - 11/3$ . Далее,  $|\vec{AC}| = |a|$ , т.е.  $(\tilde{x} + 1)^2 + (\tilde{y} - 2)^2 = 3^2 + (-4)^2$ , или  $((4/3)\tilde{y} - 8/3)^2 + (\tilde{y} - 2)^2 = 25$ . Решая это уравнение относительно  $\tilde{y}$ , найдем  $\tilde{y}_1 = -1$ ,  $\tilde{y}_2 = 5$ . Следовательно, существуют две точки  $C$ , удовлетворяющие условию задачи:  $C_1(-5; -1)$  и  $C_2(3; 5)$ . ▀

**Пример 7** (нормальное уравнение прямой на плоскости). Докажите, что в любой системе координат уравнение

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0 \quad (3.32)$$

определяет прямую на плоскости. Выясните геометрический смысл коэффициентов  $A$  и  $B$ , если система координат прямоугольная.

□ Если  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$  — две различные точки, заданные своими координатами в некоторой (не обязательно прямоугольной) системе координат, то в этой системе координат уравнение прямой  $l = (M_1 M_2)$  имеет вид (см. формулу (2.57) гл. 2)  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ , или  $Ax + By + C = 0$ , где  $A = y_2 - y_1$ ,  $B = -(x_2 - x_1)$ ,  $A^2 + B^2 > 0$ ,  $C = -Ax_1 - By_1$ . Вектор

$$\mathbf{a} = (-B; A) = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) \quad (3.33)$$

— направляющий вектор прямой  $l$ , заданной уравнением (3.32).

Всякой уравнение (3.32) есть уравнение прямой на плоскости. Эта прямая проходит через точки  $(0; -C/B)$  и  $(-C/A; 0)$ , если  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ . Если  $A = 0$ , то уравнение  $By + C = 0$ ,  $B \neq 0$  — уравнение прямой, проходящей через точки  $(0; -C/B)$  и  $(1; -C/B)$ . Эта прямая параллельна оси абсцисс. Уравнение  $Ax + C = 0$ ,  $A \neq 0$  есть уравнение прямой, параллельной оси ординат (прямая проходит через точки  $(-C/A; 0)$  и  $(-C/A; 1)$ ).

Если  $M_1(x_1; y_1)$  — точка прямой  $l$  с уравнением (3.32), то

$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$

т.е.  $C = -Ax_1 - By_1$ , и уравнение (3.32)

можно записать в виде

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \quad (3.34)$$

Если система координат — прямоугольная, то вектор  $\vec{N} = (A; B)$  удовлетворяет соотношению

$$(\vec{N}, \mathbf{a}) = A(-B) + BA = 0,$$

т.е.  $\vec{N} \perp \mathbf{a}$  (рис. 3.25). Вектор  $\vec{N}$  называется *нормальным вектором прямой  $l$* , заданной уравнением (3.32). Таким образом, для прямой  $l$ , задан-

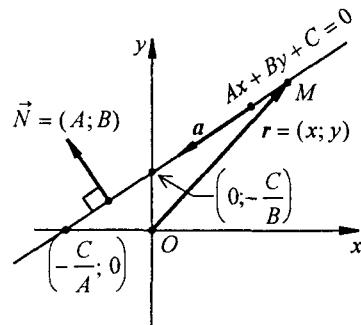


Рис. 3.25

ной уравнением (3.32) в прямоугольной системе координат, координаты нормального вектора  $\vec{N}$  — это коэффициенты при переменных  $x$  и  $y$  в уравнении (3.32). Уравнение (3.32) можно записать также в виде

$$(\vec{r}, \vec{N}) = D, \quad (3.35)$$

где  $\vec{r} = (x; y)$  — радиус-вектор произвольной точки  $M(x; y)$  прямой  $l$ ,

$\vec{N} = (A; B)$  — ее нормальный вектор,  $D = -C$ . Уравнение (3.35), эквивалентное (3.32), если система координат прямоугольная, называется *нормальным векторным уравнением прямой на плоскости*, а соответствующее уравнение (3.32) — *нормальным (координатным) уравнением*  $l$ . ■

**Пример 8.** Найдите радиус-вектор  $\vec{x}$  общей точки прямых  $l: (\vec{r}, \vec{N}) = D$  и  $L: \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{b}$ ,  $t \in \mathbf{R}$ ,  $(\vec{N}, \vec{b}) \neq 0$ .

▲  $(\vec{x}, \vec{N}) = D$  и  $\vec{x} = \vec{r}_0 + t\vec{b}$  при некотором  $t \in \mathbf{R}$ . Подставляя  $\vec{x}$  в первое из уравнений, найдем

$$(\vec{r}_0, \vec{N}) + t(\vec{b}, \vec{N}) = D, \text{ т.е. } t = \frac{D - (\vec{r}_0, \vec{N})}{(\vec{b}, \vec{N})} \text{ и } \vec{x} = \vec{r}_0 + \frac{D - (\vec{r}_0, \vec{N})}{(\vec{b}, \vec{N})}\vec{b}. \quad \blacktriangleright$$

Углом между двумя пересекающимися прямыми называется величина меньшего из углов, образованных этими прямыми. Угол между перпендикулярными прямыми равен  $90^\circ$  (все четыре угла, образованные этими прямыми, конгруэнтны). Если прямые параллельны, то угол между ними считаю равным  $0^\circ$ . Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол между двумя пересекающимися прямыми, соответственно, параллельными данным скрещивающимся прямым. Если  $a$  и  $b$  — направляющие векторы прямых, то угол  $\varphi$  между этими прямыми находят по формуле

$$\cos \varphi = \left| \frac{(a, b)}{\|a\| \|b\|} \right|.$$

**Пример 9.** Найдите угол  $\varphi$  между прямыми  $-x + 2y + 3 = 0$  и  $3x - y - 1 = 0$ .

▲ Направляющие векторы прямых:  $a = (-2; 1)$ ,  $b = (3; 1)$  (см. (3.33)). Следовательно,

$$\cos\varphi = \left| \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \right| = \left| \frac{(-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 3}{\sqrt{5}\sqrt{10}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ т.е. } \varphi = 45^\circ. \blacktriangleright$$

**Пример 10.** Найдите точку  $M^*(x^*; y^*)$ , симметричную точке  $M_0(1; 3)$  относительно прямой  $l: x - 2y + 3 = 0$ .

▲ По определению симметричной точки:

а) вектор  $\overrightarrow{M_0 M^*} = (x^* - 1; y^* - 3)$  перпендикулярен прямой  $l$ , т.е. ортогонален ее направляющему вектору  $\mathbf{a} = (2; 1)$ , иными словами,

$$0 = (\overrightarrow{M_0 M^*}, \mathbf{a}) = 2(x^* - 1) + (y^* - 3) = 2x^* + y^* - 5; \quad (3.36)$$

б) середина отрезка  $[MM^*]$ , т.е.

точка  $Q\left(\frac{1+x^*}{2}; \frac{3+y^*}{2}\right)$  (рис. 3.26), лежит на прямой  $l$ , и, значит, координаты  $(1+x^*)/2$  и  $(3+y^*)/2$  удовлетворяют уравнению прямой:

$$0 = \frac{1+x^*}{2} - 2 \cdot \frac{3+y^*}{2} + 3 = \frac{1}{2}x^* - y^* + \frac{1}{2}. \quad (3.37)$$

Из системы уравнений (3.36), (3.37) находим  $x^* = 9/5$ ,  $y^* = 7/5$ . ▼

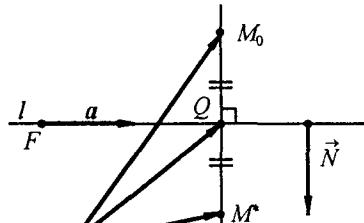


Рис. 3.26

**Пример 11.** Напишите уравнение прямой  $l^*$ , проходящей через точку  $M_0(3; 7)$  перпендикулярно прямой  $l: x - y + 3 = 0$ . Найдите расстояние от точки  $M_0$  до прямой  $l$ .

▲ Нормальный вектор  $\vec{N} = (1; -1)$  прямой  $l$  является направляющим вектором прямой  $l^*$ . Поскольку  $l^*$  проходит через точку  $M_0(3; 7)$ , ее уравнение

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-1} \Leftrightarrow x + y - 10 = 0.$$

Координаты  $(x_Q; y_Q)$  общей точки  $Q$  прямых  $l$  и  $l^*$  (т.е. основания перпендикуляра, опущенного из точки  $M_0$  на прямую  $l$ ) находятся из системы уравнений  $x_Q - y_Q + 3 = 0$ ,  $x_Q + y_Q - 10 = 0$ , т.е.  $x_Q = 7/2$ ,  $y_Q = 13/2$ .

Расстояние от точки  $M_0$  до  $l$  равно

$$d = |M_0Q| = \sqrt{(7/2 - 3)^2 + (13/2 - 7)^2} = 1/\sqrt{2}. \quad \blacktriangledown$$

Так же как и в пространстве, на плоскости вводится операция ортогонального проецирования на прямую: если  $M_0$  — точка плоскости  $\mathcal{P}$ , то ее *ортогональной проекцией*  $\text{Пр}_l M_0$  на прямую  $l \subset \mathcal{P}$  называется основание  $Q$  перпендикуляра  $l^*$ , опущенного из точки  $M_0$  на прямую  $l$  ( $Q = M_0$ , если  $M_0 \in l$ ) (рис. 3.26). Если зафиксировать прямую  $l_0 \in \mathcal{P}$ , перпендикулярную  $l$ , то, поскольку  $l_0 \parallel l^*$ , имеем  $\text{Пр}_l M_0 = \Pi_{l_0}^l(M_0) = \Pi_l^{l^*}(M_0)$ . По определению,  $\text{Пр}_l b = \Pi_{l_0}^{l^*}(b)$  для любого вектора  $b$  плоскости  $\mathcal{P}$ . Как и для ортогонального проецирования на прямую в пространстве, выполнены равенства

$$\text{Пр}_l b + \text{Пр}_{l_0} b = b, \text{ если } l \perp l_0; \quad (3.38)$$

$$\text{Пр}_l b = \frac{(a, b)}{(a, a)} a, \quad (3.39)$$

$$|\text{Пр}_l b| = \frac{|(a, b)|}{|a|}, \quad (3.40)$$

если  $a$  — направляющий вектор прямой  $l$ .

Прямая  $l \in \mathcal{P}$  разбивает плоскость  $\mathcal{P}$  на две полуплоскости. Если зафиксировать прямую  $l_0 \perp l$  и нормальный вектор  $\vec{N}$  прямой  $l$ , то точки  $M_1 \notin l$  и  $M_2 \notin l$  лежат в одной полуплоскости тогда и только тогда, когда векторы  $\text{Пр}_{l_0} \vec{FM}_1$  и  $\text{Пр}_{l_0} \vec{FM}_2$  сонаправлены (рис. 3.27), т.е. числа  $d_1 = (\vec{FM}_1, \vec{N}) / |\vec{N}|$  и  $d_2 = (\vec{FM}_2, \vec{N}) / |\vec{N}|$  (ср. с (3.39)) имеют одинаковый знак. В связи с этим вводится для каждой точки  $M \in \mathcal{P}$  число

$$d = d_l(M) = \frac{(\vec{FM}, \vec{N})}{|\vec{N}|}, \quad (3.41)$$

называемое *ориентированным расстоянием от точки  $M$  до прямой  $l$* . Числа  $d_l(M_1)$  и  $d_l(M_2)$  имеют одинаковый знак тогда и только тогда, когда точки  $M_1$  и  $M_2$  лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой  $l$ ;  $d_l(M) > 0$  тогда и только тогда, когда точка  $M$  расположена в той

же полуплоскости, что и конец вектора  $\vec{N}$ , если начало  $\vec{N}$  поместить на прямой  $l$ .

**Пример 12** (расстояние от точки до прямой на плоскости). Докажите, что число  $d_l(M)$  в формуле (3.41) не зависит ни от выбора точки  $F \in l$ , ни от длины вектора  $\vec{N}$ .

Проверьте, что  $|d_l(M_0)|$  — обычное расстояние от точки  $M_0$  до прямой  $l$ .  
Докажите, что если  $l: Ax + By + C = 0$

и  $\vec{N} = (A; B)$ , то для точки  $M_0(x_0; y_0)$

$$d_l(M_0) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.42)$$

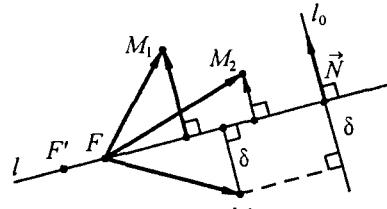


Рис. 3.27

□ Если  $F'$  — другая точка  $l$ , то  $\vec{F}'\vec{F} \perp \vec{N}$ , т.е.  $(\vec{F}'\vec{F}, \vec{N}) = 0$ , поэтому

$$\frac{(\vec{F}'\vec{M}, \vec{N})}{|\vec{N}|} = \frac{(\vec{F}'\vec{F}, \vec{N}) + (\vec{F}\vec{M}, \vec{N})}{|\vec{N}|} = \frac{(\vec{F}\vec{M}, \vec{N})}{|\vec{N}|}.$$

Если  $\vec{N}' = k\vec{N}$ ,  $k > 0$ , то  $|\vec{N}'| = k|\vec{N}|$  и  $(\vec{F}\vec{M}, \vec{N}') / |\vec{N}'| = (\vec{F}\vec{M}, k\vec{N}) / (k|\vec{N}|) = (\vec{F}\vec{M}, \vec{N}) / |\vec{N}|$ . Расстояние  $\delta$  от точки  $M_0$  (рис. 3.27) до прямой  $l$  есть  $\delta = |\text{Пр}_{l_0} \vec{F}\vec{M}_0| = |(\vec{F}\vec{M}_0, \vec{N})| / |\vec{N}| = |d_l(M_0)|$  (см. формулу (3.40)). Наконец, если  $l: Ax + By + C = 0$ ,  $\vec{N} = (A; B)$  и  $M_0(x_0; y_0)$ , то, обозначая  $(x_F; y_F)$  координаты точки  $F$  и используя тот факт, что  $F \in l$ , т.е.  $C = -(Ax_F + By_F)$ , получим

$$d_l(M_0) = \frac{(\vec{F}\vec{M}_0, \vec{N})}{|\vec{N}|} = \frac{(x_0 - x_F)A + (y_0 - y_F)B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \blacksquare$$

**Пример 13.** Найдите длину  $h$  высоты, опущенной из вершины  $A(4; 4)$  треугольника  $ABC$ , если  $B(-6; -1)$ ,  $C(-2; -4)$ .

▲ Уравнение прямой  $l = (BC)$ :  $\frac{x+6}{-2+6} = \frac{y+1}{-4+1} \Leftrightarrow 3x + 4y + 22 = 0$ .

Поэтому

$$h = |d_l(A)| = \left| \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 22}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = 10. \quad \blacktriangledown$$

**Пример 14.** Напишите уравнение биссектрисы  $\tilde{l}$  того угла, образованного прямыми  $l$ :  $x + 7y = 0$  и  $L$ :  $x - y - 4 = 0$ , внутри которого лежит точка  $A(1; 1)$ .

▲ Если  $M(x; y) \in \tilde{l}$  и лежит внутри данного угла (рис. 3.28), то числа

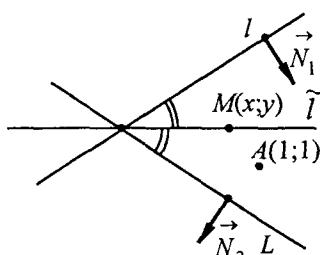


Рис. 3.28

$$d_l(M) = (x + 7y) / \sqrt{50} \text{ и}$$

$$d_l(A) = (1 + 7 \cdot 1) / \sqrt{50} > 0$$

имеют одинаковый знак, т.е.  $d_l(M) > 0$ .  
Одинарный знак и у чисел

$$d_L(M) = (x - y - 4) / \sqrt{2} \text{ и}$$

$$d_L(A) = (1 - 1 - 4) / \sqrt{2} < 0,$$

т.е.  $d_L(M) < 0$ . Точка  $M(x; y)$  удовлетворяет определяющему свойству биссектрисы угла: ее расстояния  $|d_l(M)| = d_l(M)$  и  $|d_L(M)| = -d_L(M)$  до прямых  $l$  и  $L$  равны, т.е.  $(x + 7y) / (5\sqrt{2}) = -(x - y - 4) / \sqrt{2}$ , или  $6x + 2y - 20 = 0$ . Итак, все точки биссектрисы удовлетворяют уравнению  $3x + y - 10 = 0$ , которое, следовательно, и есть уравнение биссектрисы. ▼

**Пример 15.** Дан треугольник  $ABC$ :  $A(4; 4)$ ,  $B(-6; -1)$ ,  $C(-2; -4)$ . Напишите уравнение биссектрисы внутреннего угла  $C$ .

▲ Имеем  $\vec{CA} = (6; 8)$ ,  $\vec{CB} = (-4; 3)$ ,  $|\vec{CA}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ,  $|\vec{CB}| = 5$ .

По формуле из примера 11 §2 направляющий вектор  $\vec{CL}$  биссектрисы равен

$$\frac{|\vec{CA}| \vec{CB} + |\vec{CB}| \vec{CA}}{|\vec{CA}| + |\vec{CB}|} = \frac{10 \vec{CB} + 5 \vec{CA}}{15} = \frac{2 \vec{CB} + \vec{CA}}{3} = \left( -\frac{2}{3}; \frac{14}{3} \right).$$

Следовательно, ее уравнение  $\frac{x+2}{-2/3} = \frac{y+4}{14/3} \Leftrightarrow 7x + y + 18 = 0$ . ▼

**Пример 16.** Зная вершину  $A(3; -4)$  треугольника  $ABC$  и уравнения двух его высот ( $BM$ ):  $7x - 2y - 1 = 0$  и ( $CN$ ):  $2x - 7y - 6 = 0$ , напишите уравнение стороны ( $BC$ ).

▲ Нормальный вектор  $(7; -2)$  прямой ( $BM$ ) параллелен прямой ( $AC$ ).

Поэтому ее уравнение  $\frac{x-3}{7} = \frac{y+4}{-2}$ , или ( $AC$ ):  $2x + 7y + 22 = 0$ . Координаты точки  $C(x_C; y_C) = (AC) \cap (CN)$  найдем из системы уравнений  $2x_C + 7y_C + 22 = 0$ ,  $2x_C - 7y_C - 6 = 0 \Leftrightarrow x_C = -4$ ,  $y_C = -2$ . Аналогично,  $(2; -7)$  — направляющий вектор ( $AB$ ), и уравнение этой прямой  $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-7}$ , или ( $AB$ ):  $7x + 2y - 13 = 0$ . Координаты точки  $B(x_B; y_B)$  находятся из системы уравнений  $7x_B + 2y_B - 13 = 0$ ,  $7x_B - 2y_B - 1 = 0$ , т.е.  $x_B = 1$ ,  $y_B = 3$ . Следовательно, уравнение ( $BC$ ):

$$\frac{x-1}{-4-1} = \frac{y-3}{-2-3} \Leftrightarrow x - y + 2 = 0. \quad \blacktriangleright$$

**Пример 17.** Напишите уравнения и найдите длину  $\delta$  перпендикуляра, опущенного из точки  $M_0(-3; 13; 7)$  на прямую  $l$ :  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{1}$ .

▲ Пусть  $Q(x_Q; y_Q; z_Q)$  — основание искомого перпендикуляра (см. рис. 3.26). Так как  $Q \in l$ , то

$$\frac{x_Q - 1}{3} = \frac{z_Q - 3}{1} \Leftrightarrow x_Q = 3z_Q - 8, \quad \frac{y_Q - 2}{-4} = \frac{z_Q - 3}{1} \Leftrightarrow y_Q = -4z_Q + 14.$$

Вектор  $\vec{M_0Q} = (x_Q + 3; y_Q - 13; z_Q - 7)$  ортогонален направляющему вектору  $a = (3; -4; 1)$  прямой  $l$ :

$$\begin{aligned} 0 &= (a, \vec{M_0Q}) = 3(x_Q + 3) - 4(y_Q - 13) + (z_Q - 7) = \\ &= 3(3z_Q - 5) - 4(-4z_Q + 1) + (z_Q - 7) = 26z_Q - 26. \end{aligned}$$

Отсюда  $z_Q = 1$ ,  $x_Q = -5$ ,  $y_Q = 10$ ,

$$\delta = |M_0Q| = \sqrt{(-5+3)^2 + (10-13)^2 + (1-7)^2} = 7.$$

Уравнения прямой ( $M_0Q$ ):

$$\frac{x+3}{-5+3} = \frac{y-13}{10-13} = \frac{z-7}{1-7} \Leftrightarrow \frac{x+3}{2} = \frac{y-13}{3} = \frac{z-7}{6}. \quad \blacktriangleright$$

**Пример 18.** Найдите точку  $M^*(x^*; y^*; z^*)$ , симметричную точке  $M_0(1; 2; 3)$  относительно прямой  $l$ :

$$\frac{x-8}{1} = \frac{y-11}{3} = \frac{z-4}{-1}.$$

▲ Векторы  $\vec{M_0M^*} = (x^* - 1; y^* - 2; z^* - 3)$  и  $\mathbf{a} = (1; 3; -1)$  ортогональны (ср. с примером 10, рис. 3.26):  $x^* - 1 + 3(y^* - 2) - (z^* - 3) = 0$ . Середина  $Q\left(\frac{1+x^*}{2}; \frac{2+y^*}{2}; \frac{3+z^*}{2}\right)$  отрезка  $[M_0M^*]$  лежит на прямой  $l$ :

$$\frac{(1+x^*)/2-8}{1} = \frac{(2+y^*)/2-11}{3}, \quad \frac{(1+x^*)/2-8}{1} = \frac{(3+z^*)/2-4}{-1}.$$

Решая систему трех получившихся уравнений, найдем:

$$x^* = 9, \quad y^* = 2, \quad z^* = 11. \quad \blacktriangleright$$

**Пример 19.** Напишите уравнения общего перпендикуляра к двум прямым  $l$ :  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-3}$  и  $L$ :  $\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{1}$ .

▲ Пусть  $\mathbf{a} = (1; 2; -3)$  и  $\mathbf{b} = (-2; 1; 1)$  — направляющие векторы данных прямых,  $M_1(x_1; y_1; z_1) \in l$  и  $M_2(x_2; y_2; z_2) \in L$  — точки пересечения этих прямых с искомым перпендикуляром. Шесть уравнений для нахождения  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  получаем из следующих условий:

$$M_1 \in l, \text{ т.е. } \frac{x_1-2}{1} = \frac{y_1-2}{2}, \quad \frac{x_1-2}{1} = \frac{z_1+1}{-3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y_1 = 2x_1 - 2, \quad z_1 = -3x_1 + 5;$$

$$M_2 \in L, \text{ т.е. } \frac{x_2}{-2} = \frac{y_2-2}{1}, \quad \frac{z_2-4}{1} = \frac{y_2-2}{1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_2 = -2y_2 + 4, \quad z_2 = y_2 + 2;$$

$$(\vec{M_1M_2}, \mathbf{a}) = 0, \text{ т.е. } x_2 - x_1 + 2(y_2 - y_1) - 3(z_2 - z_1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 14x_1 + 3y_2 - 17 = 0;$$

$$\begin{aligned}\vec{(M_1 M_2, b)} = \mathbf{0}, \text{ т.е. } -2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_1 + 2y_2 - 3 = 0.\end{aligned}$$

Отсюда  $x_1 = y_2 = 1$ ,  $y_1 = 0$ ,  $z_1 = x_2 = 2$ ,  $z_2 = 3$ . Следовательно,  $M_1(1; 0; 2)$ ,  $M_2(2; 1; 3)$ . Уравнения перпендикуляра:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-2}{3-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

Расстояние  $|M_1 M_2|$  между скрещивающимися прямыми  $l$  и  $L$  равно

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{3}. \quad \blacktriangleright$$

**Пример 20.** Докажите, что прямая  $\tilde{l}$ , проходящая через точку  $M_0(1; 2; 3)$  и пересекающая прямые

$$l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2} \text{ и } L: \frac{x-2}{2} = \frac{y-8}{-9} = \frac{z+3}{6},$$

образует с этими прямыми равные углы.

▲ Если  $M_1(x_1; y_1; z_1) = l \cap \tilde{l}$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2) = L \cap \tilde{l}$ , то существуют такие числа  $t$  и  $\tau$ , что  $x_1 = 1 + 2t$ ,  $y_1 = 1 - t$ ,  $z_1 = 1 + 2t$ ,  $x_2 = 2 + 2\tau$ ,  $y_2 = 8 - 9\tau$ ,  $z_2 = -3 + 6\tau$ . Точки  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  лежат на одной прямой, т.е. векторы

$$\vec{M_0 M_1} = (x_1 - 1; y_1 - 2; z_1 - 3) = (2t; -t - 1; 2t - 2),$$

$$\vec{M_0 M_2} = (x_2 - 1; y_2 - 2; z_2 - 3) = (2\tau + 1; -9\tau + 6; 6\tau - 6)$$

коллинеарны. По условию коллинеарности,

$$0 = \begin{vmatrix} 2t & -t - 1 \\ 2\tau + 1 & -9\tau + 6 \end{vmatrix} = -16t\tau + 13t + 2\tau + 1,$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2t & 2t - 2 \\ 2\tau + 1 & 6\tau - 6 \end{vmatrix} = 8t\tau - 14t + 4\tau + 2,$$

$$0 = \begin{vmatrix} -t - 1 & 2t - 2 \\ -9\tau + 6 & 6\tau - 6 \end{vmatrix} = 12t\tau - 6t - 24\tau + 18.$$

Исключая  $t\tau$  из первых двух уравнений, получаем  $\tau = (3/2)t - 1/2$ . Если исключить  $t\tau$  из последних двух уравнений, то получим  $\tau = (t + 1)/2$ .

Следовательно,  $3t - 1 = t + 1$ , т.е.  $t = 1$ ,  $\tau = (1+1)/2 = 1$ . Таким образом,  $M_1(3; 0; 3)$ ,  $M_2(4; -1; 3)$ . Уравнения  $\tilde{l}$

$$\frac{x-1}{4-3} = \frac{y-2}{-1-0} = \frac{z-3}{3-3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{0}.$$

Направляющие векторы прямых  $\tilde{l}$ ,  $l$ ,  $L$  таковы:  $c = (1; -1; 0)$ ,  $a = (2; -1; 2)$ ,  $b = (2; -9; 6)$ . Угол  $\phi$  между прямыми  $l$  и  $\tilde{l}$  находится по формуле

$$\cos\phi = \left| \frac{(a, c)}{|a||c|} \right| = \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \phi = 45^\circ.$$

Угол  $\psi$  между прямыми  $\tilde{l}$  и  $L$  определяется из соотношения

$$\cos\psi = \left| \frac{(b, c)}{|b||c|} \right| = \frac{2 \cdot 1 + (-9) \cdot (-1) + 6 \cdot 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2 + (-9)^2 + 6^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{т.е. } \psi = 45^\circ = \phi. \quad \blacktriangleright$$

Пусть в пространстве фиксирована прямоугольная система координат  $\{O, i, j, k\}$  и пусть  $\mathcal{P}$  — плоскость, заданная нормальным векторным уравнением

$$(\vec{r}, \vec{N}) = -D, \quad (3.43)$$

где  $\vec{r} = (x; y; z)$  — радиус-вектор произвольной точки  $M(x; y; z) \in \mathcal{P}$ ,

$$\vec{N} = (A; B; C), A^2 + B^2 + C^2 = |\vec{N}|^2 > 0$$
 нормальный вектор плоскости  $\mathcal{P}$ .

Раскрывая левую часть формулы (3.43) по формуле (3.31), получаем *нормальное координатное уравнение плоскости*  $\mathcal{P}$ :

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0. \quad (3.44)$$

Плоскость  $\mathcal{P}$ , заданная нормальным уравнением в прямоугольной системе координат, перпендикулярна вектору  $\vec{N} = (A; B; C)$ , координаты которого — коэффициенты при неизвестных  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в уравнении (3.44) этой плоскости.

Если  $A \neq 0$ , то плоскость  $\mathcal{P}$  пересекает ось абсцисс в точке  $M_1(-D/A; 0; 0)$ . Если  $B \neq 0$ , то  $\mathcal{P}$  пересекает ось ординат в точке  $M_2(0; -D/B; 0)$ . Если  $C \neq 0$ , то  $\mathcal{P}$  пересекает ось аппликат в точке  $M_3(0; 0; -D/C)$ .

Если  $M_1(a; 0; 0)$ ,  $M_2(0; b; 0)$ ,  $M_3(0; 0; c)$  — три точки пересечения плоскости  $\mathcal{P}$  с осями координат, то уравнение плоскости  $\mathcal{P}$  —

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (3.45)$$

Уравнение (3.45) называется уравнением плоскости в отрезках.

Если в уравнении (3.44)  $A = 0$ , т.е.  $(\vec{i}, \vec{N}) = 0$ , то плоскость  $\mathcal{P}$  параллельна оси абсцисс. Она пересекает плоскость  $Oyz$  по прямой, уравнения которой  $x = 0$ ,  $By + Cz + D = 0$ . Если  $B = 0$  ( $C = 0$ ), то плоскость  $\mathcal{P}$  параллельна оси ординат (оси аппликат).

Как и в случае прямой на плоскости, для плоскости  $\mathcal{P}$ , заданной уравнением (3.44) в прямоугольной системе координат в пространстве, вводится ориентированное расстояние  $d_{\mathcal{P}}(M_0)$  от точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  пространства до плоскости  $\mathcal{P}$  по формуле

$$d_{\mathcal{P}}(M_0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.46)$$

Для любых двух точек  $M_1 \notin \mathcal{P}$  и  $M_2 \notin \mathcal{P}$  знаки чисел  $d_{\mathcal{P}}(M_1)$  и  $d_{\mathcal{P}}(M_2)$  одинаковы тогда и только тогда, когда точки  $M_1$  и  $M_2$  лежат по одну сторону от плоскости  $\mathcal{P}$  (в одном полупространстве, определяемом этой плоскостью);  $d_{\mathcal{P}}(M) > 0$  тогда и только тогда, когда точка  $M$  лежит в том же полупространстве, что и конец вектора  $\vec{N} = (A; B; C)$ , если его начало поместить в плоскость  $\mathcal{P}$ . Расстояние  $d$  от точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  до плоскости  $\mathcal{P}$ , заданной уравнением (3.44) в прямоугольной системе координат, определяется формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.47)$$

**Пример 21.** Докажите формулу (3.47).

□ Записав уравнение (3.44) в виде (3.43), где  $\vec{N} = (A; B; C)$ , и воспользовавшись обозначением  $\vec{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$  и формулами (3.27) и (3.29),

$$\text{получим } d = \frac{|\vec{r}_0, \vec{N} + D|}{|\vec{N}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \blacksquare$$

**Пример 22.** Напишите нормальное координатное уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(1; 0; -1)$ ,  $M_2(-1; 1; 0)$ ,  $M_3(0; 2; 1)$ .

▲ Пусть (3.44) — искомое уравнение. Координаты точек  $M_1, M_2, M_3$  ему удовлетворяют. Поэтому  $A - C + D = 0, -A + B + D = 0, 2B + C + D = 0$ . Сложив почленно эти равенства, получим  $3B + 3D = 0$ , т.е.  $B = -D$ . Тогда  $A = 0, C = D$  и искомое уравнение (3.44) имеет вид  $D(0 \cdot x - 1 \cdot y + 1 \cdot z + 1) = 0$ . Так как  $2D^2 = A^2 + B^2 + C^2 > 0$ , то  $D \neq 0$ . Сокращая на  $D$ , окончательно получаем  $-y + z + 1 = 0$ . ▼

Если точка  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  лежит в плоскости  $\mathcal{P}$ , заданной уравнением (3.44), то  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$  и уравнение (3.44) можно записать в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (3.48)$$

**Пример 23.** Найдите нормальное координатное уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(-1; 2; 1)$  перпендикулярно вектору  $\vec{N} = (2; 0; -2)$ .

▲ Искомое уравнение имеет вид (ср. с (3.48))

$$2(x - (-1)) + 0 \cdot (y - 2) + (-2)(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x - z + 2 = 0. \quad \blacktriangledown$$

**Пример 24.** Основанием треугольной пирамиды  $DABC$  с вершиной  $D(2; 2; -\sqrt{3})$  служит треугольник с вершинами в точках  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(0; 1; 1)$ ,  $C(1; 1; 0)$ . Найдите длину  $h$  высоты пирамиды.

▲ Запишем уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки  $A, B, C$ . По формуле (2.51) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 0 - 0 & 1 - 0 & 1 - 0 \\ 1 - 0 & 1 - 0 & 0 - 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -x + y - z. \end{aligned}$$

Длина высоты есть расстояние от точки  $D$  до этой плоскости. По формуле (3.47)

$$h = \frac{|-2 + 2 - \sqrt{3}|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 1. \quad \blacktriangledown$$

Пусть плоскости  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  заданы нормальными координатными уравнениями

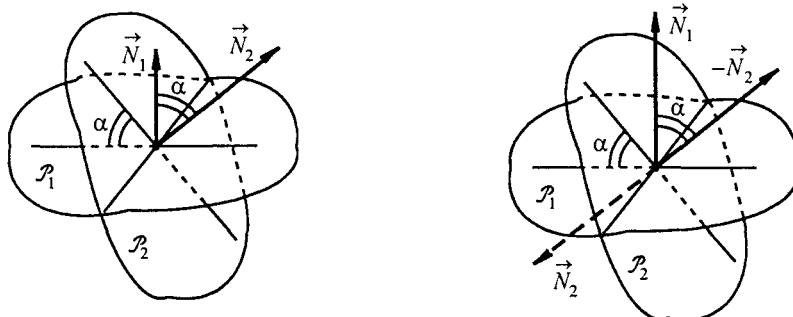
$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & \quad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \\ \mathcal{P}_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, & \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Плоскости  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны их нормальные векторы  $\vec{N}_1 = (A_1; B_1; C_1)$  и  $\vec{N}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ , т.е. когда существует такое число  $\lambda \neq 0$ , что

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2. \quad (3.50)$$

Плоскости  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда ортогональны их нормальные векторы:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (3.51)$$



$$\text{а) } 0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ, \quad \alpha = \phi \quad \text{б) } 90^\circ \leq \phi \leq 180^\circ, \quad \alpha = 180^\circ - \phi$$

Рис. 3.29

Пересекаясь, непараллельные плоскости  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  образуют две пары равных двугранных углов. Углом  $\alpha$  между плоскостями  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  называется величина меньшего из этих двугранных углов. Угол между параллельными плоскостями по определению считают равным  $0^\circ$ . Пусть  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$  — нормальные векторы плоскостей  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ . Пусть  $\varphi = (\vec{N}_1, \vec{N}_2)$ , тогда  $\alpha = \varphi$ , если  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ , и  $\alpha = 180^\circ - \varphi$ , если  $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$  (рис. 3.29, а, б). В обоих случаях

$$\cos \alpha = |\cos \varphi| = \frac{|(\vec{N}_1, \vec{N}_2)|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}. \quad (3.52)$$

**Пример 25.** Найдите расстояние между параллельными плоскостями  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ , заданными уравнениями (3.49).

▲ Расстояние между  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  есть расстояние между произвольной точкой  $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \mathcal{P}_2$  и плоскостью  $\mathcal{P}_1$ , т.е. число

$$d = \frac{|A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Плоскости  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  параллельны. Следовательно, существует такое число  $\lambda$ , что справедливы равенства (3.50). Поэтому

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = \lambda(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0) + D_1 = D_1 - \lambda D_2.$$

Окончательно

$$d = \frac{|D_1 - \lambda D_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}},$$

где  $\lambda$  удовлетворяет (3.50). Если, например,  $A_2 \neq 0$ , то

$$d = \frac{|A_2D_1 - A_1D_2|}{|A_2|\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}. \quad \blacktriangleright$$

**Пример 26.** Найдите величину того из четырех двугранных углов, образованных плоскостями

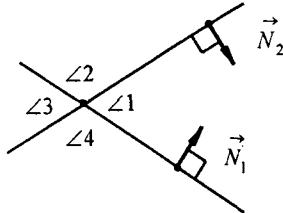


Рис. 3.30

$$\mathcal{P}_1: 8x + 4y + z + 1 = 0 \text{ и}$$

$$\mathcal{P}_2: 2x - 2y + z + 1 = 0,$$

в котором лежит точка  $M_0(1; 1; 1)$ .

▲ Зафиксируем нормальные векторы

$$\vec{N}_1 = (8; 4; 1) \text{ и } \vec{N}_2 = (2; -2; 1) \text{ плоскостей.}$$

Если занумеровать двугранные углы, как показано на рис. 3.30, то, поскольку

$$d_{\mathcal{P}_1}(M_0) = \frac{8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 + 1}{\sqrt{64 + 16 + 1}} > 0,$$

$$d_{\mathcal{P}_2}(M_0) = \frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 + 1}{\sqrt{4 + 4 + 1}} > 0,$$

точка  $M_0$  лежит внутри  $\angle 1$ , величина которого по теореме об углах с соответственно перпендикулярными сторонами равна

$$180^\circ - (\overset{\wedge}{\vec{N}_1, \vec{N}_2}) = 180^\circ - \arccos \frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} = 180^\circ - \arccos \frac{1}{3}. \quad \blacktriangleright$$

**Пример 27.** Найдите угол  $\alpha$  между плоскостями

$$\mathcal{P}_1: 4x + 2y - 2z + 5 = 0 \text{ и } \mathcal{P}_2: -x + y + 2z - 3 = 0.$$

▲ Имеем  $\vec{N}_1 = (4; 2; -2)$ ,  $\vec{N}_2 = (-1; 1; 2)$ ,  $|\vec{N}_1| = 2\sqrt{6}$ ,  $|\vec{N}_2| = \sqrt{6}$ ,

$$(\overset{\wedge}{\vec{N}_1, \vec{N}_2}) = -6. \text{ По формуле (3.52), } \cos \alpha = \left| \frac{-6}{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} \right| = \frac{1}{2}, \alpha = 60^\circ. \quad \blacktriangleright$$

**Пример 28.** Найдите угол между плоскостью грани  $A_1B_1C_1D_1$  и плоскостью, проходящей через вершины  $A_1$ ,  $B$  и середину  $M$  ребра  $[AD]$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  (рис. 3.31).

▲ Взяв длину ребра куба за единицу длины, рассмотрим систему координат  $\{A, \vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AA_1}\}$ . В этой прямоугольной системе координат  $A_1(0; 0; 1)$ ,  $B(0; 1; 0)$ ,  $M(1/2; 0; 0)$ . По формуле (3.45), уравнение плоскости  $(A_1BM)$

$$\frac{x}{1/2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1, \text{ т.е. } 2x + y + z = 1.$$

Ее нормальный вектор  $\vec{N}_1 = (2; 1; 1)$ .

Плоскость  $(A_1B_1C_1D_1)$  параллельна координатной плоскости  $Oxy$ , ее уравнение  $z = 1$ , нормальный вектор  $\vec{N}_2 = (0; 0; 1)$ . По формуле (3.52),

$$\cos \alpha = \left| \frac{(\overset{\wedge}{\vec{N}_1, \vec{N}_2})}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} \right| = \frac{1}{\sqrt{6}}, \text{ т.е. } \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}. \quad \blacktriangleright$$

Углом между прямой  $l$  и плоскостью  $\mathcal{P}$  называется угол  $\psi$  между  $l$  и ортогональной проекцией  $l^*$  прямой  $l$  на плоскость  $\mathcal{P}$ . Если  $\vec{a}$  — направляющий вектор  $l$ ,  $\overset{\wedge}{\vec{N}}$  — нормальный вектор  $\mathcal{P}$ ,  $\varphi = (\overset{\wedge}{\vec{a}}, \overset{\wedge}{\vec{N}})$  (рис. 3.32, а, б),

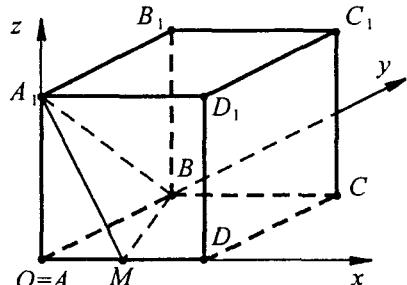
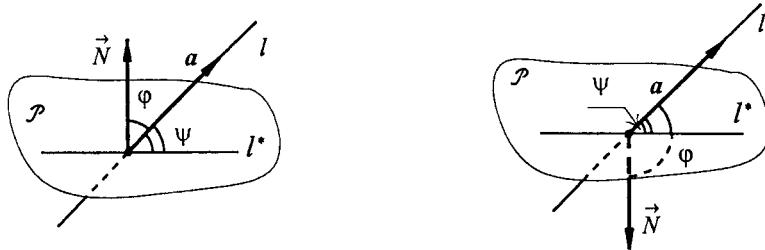


Рис. 3.31

то углы  $\psi$  и  $\varphi$  связаны соотношениями  $\psi = 90^\circ - \varphi$ , если  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ , и  $\psi = \varphi - 90^\circ$ , если  $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ . Поэтому угол  $\psi$  находят по формуле

$$\sin \psi = |\cos \varphi| = \frac{|(\vec{a}, \vec{N})|}{|\vec{a}| |\vec{N}|}. \quad (3.53)$$



a)  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ ,  $\psi = 90^\circ - \varphi$     б)  $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ ,  $\psi = \varphi - 90^\circ$

Рис. 3.32

**Пример 29.** При каком значении  $m$  угол  $\psi$  между прямой  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1}$  и плоскостью  $mx + y + z + 4 = 0$  равен  $45^\circ$ ?

$$= \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1} \text{ и плоскостью } mx + y + z + 4 = 0 \text{ равен } 45^\circ?$$

▲ По формуле (3.53),  $1/\sqrt{2} = \sin \psi = |(\vec{a}, \vec{N})| / (|\vec{a}| |\vec{N}|)$ , где  $\vec{a} = (2; -1; 1)$ ,  $|\vec{a}| = \sqrt{6}$ ,  $\vec{N} = (m; 1; 1)$ ,  $|\vec{N}| = \sqrt{m^2 + 2}$ ,  $(\vec{a}, \vec{N}) = 2m$ . Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|2m|}{\sqrt{6} \sqrt{m^2 + 2}} \Leftrightarrow m = \pm \sqrt{6}. \quad \blacktriangleright$$

**Пример 30\*.** В правильной пирамиде  $SABCD$  ( $S$  — вершина) величина двугранного угла при основании равна  $30^\circ$ . Точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  — середины сторон  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$ ,  $[DA]$  соответственно. Точка  $E$  лежит на ребре  $[AB]$ ,  $F \in [SC]$ . Известно, что углы, образованные прямой  $(EF)$  с плоскостью  $(SMP)$ , прямой  $(EF)$  с плоскостью  $(SBA)$  и прямой  $(DF)$  с плоскостью  $(SNQ)$ , равны. Найдите величину  $\alpha$  этих углов.

▲ Пусть  $O$  — центр квадрата  $ABCD$  (рис. 3.33). Возьмем за единицу длины половину длины отрезка  $[AB]$  и рассмотрим прямоугольную систему координат  $\{O, \vec{OM}, \vec{ON}, \vec{OS}/|\vec{OS}|\}$ . В этой системе координат

$M(1; 0; 0)$ ,  $P(-1; 0; 0)$ ,  $N(0; 1; 0)$ ,  $Q(0; -1; 0)$ ,  $A(1; -1; 0)$ ,  $B(1; 1; 0)$ ,  $C(-1; 1; 0)$ ,

$D(-1; -1; 0)$ ,  $S(0; 0; h)$ ,  $E(1; m; 0)$ ,

$F(-\lambda; \lambda; (1-\lambda)h)$ ,

где

$$h = |OS| / |OM|,$$

$$\lambda = |FS| / |SC| \in [0, 1]$$

( $h, \lambda, m$  неизвестны). Уравнения плоскостей:

$$\mathcal{P}_1 = (ABCD): z = 0;$$

$$\mathcal{P}_2 = (SMP): y = 0; \quad \mathcal{P}_3 = (SNQ): x = 0;$$

$$\mathcal{P}_4 = (SBA): 0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-h \\ 1-0 & 1-0 & 0-h \\ 1-0 & -1-0 & 0-h \end{vmatrix} =$$

$$= -2hx - 2(z-h) \Leftrightarrow hx + z - h = 0.$$

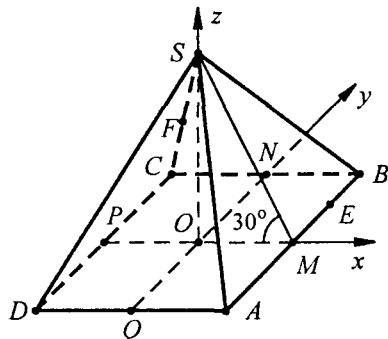


Рис. 3.33

Нормальные векторы этих плоскостей:  $\vec{N}_1 = (0; 0; 1)$ ,  $\vec{N}_2 = (0; 1; 0)$ ,  $\vec{N}_3 = (1; 0; 0)$ ,  $\vec{N}_4 = (h; 0; 1)$ . Направляющие векторы прямых таковы:

$$(EF): \vec{a} = \vec{EF} = (-\lambda - 1; \lambda - m; (1 - \lambda)h),$$

$$(DF): \vec{b} = \vec{DF} = (-\lambda + 1; \lambda + 1; (1 - \lambda)h).$$

По условию задачи, в соответствии с формулами (3.52) — (3.53)

$$\sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = |(\vec{N}_1, \vec{N}_4)| / (|\vec{N}_1| |\vec{N}_4|) = 1 / \sqrt{h^2 + 1} \Leftrightarrow h = 1 / \sqrt{3};$$

$$\frac{|(\vec{a}, \vec{N}_2)|}{|\vec{a}| |\vec{N}_2|} = \frac{|(\vec{a}, \vec{N}_4)|}{|\vec{a}| |\vec{N}_4|} = \frac{|(\vec{b}, \vec{N}_3)|}{|\vec{b}| |\vec{N}_3|} \Leftrightarrow \frac{|\lambda - m|}{\sqrt{(\lambda + 1)^2 + (\lambda - m)^2 + (1 - \lambda)^2 h^2}} =$$

$$= \frac{|2h\lambda|}{\sqrt{h^2 + 1} \sqrt{(\lambda + 1)^2 + (\lambda - m)^2 + (1 - \lambda)^2 h^2}} =$$

$$= \frac{|1 - \lambda|}{\sqrt{(1 - \lambda)^2 + (\lambda + 1)^2 + (1 - \lambda)^2 h^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\lambda - m| = \lambda, \\ \frac{\lambda}{\sqrt{(\lambda + 1)^2 + \lambda^2 + (1 - \lambda)^2 / 3}} = \frac{1 - \lambda}{\sqrt{(\lambda + 1)^2 + 4(1 - \lambda)^2 / 3}}. \end{array} \right.$$

Следовательно, либо  $\lambda - m = \lambda$ , т.е.  $m = 0$ , либо  $m = 2\lambda$ , причем  $\lambda$  в обоих случаях находится из уравнения

$$\begin{aligned} \lambda^2((7/3)\lambda^2 - (2/3)\lambda + 7/3) &= (1-\lambda)^2((7/3)\lambda^2 + (4/3)\lambda + 4/3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((1-\lambda)^2 - \lambda^2)((7/3)\lambda^2 + (4/3)\lambda + 4/3) = \\ &= \lambda^2(1-2\lambda) \Leftrightarrow (1-2\lambda)((\lambda+1)^2 + (1/3)(\lambda-1)^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1/2. \end{aligned}$$

Таким образом, задача имеет два решения:  $m = 0$ ,  $\lambda = 1/2$ ,  $h = 1/\sqrt{3}$  и  $m = 1$ ,  $\lambda = 1/2$ ,  $h = 1/\sqrt{3}$ . В обоих случаях

$$\sin \alpha = (1-\lambda) / \sqrt{(\lambda+1)^2 + (1-\lambda)^2(h^2+1)} = \sqrt{3/31},$$

т.е.  $\alpha = \arcsin \sqrt{3/31}$ . ▼

**Пример 31.** Напишите параметрические уравнения прямой, заданной как линия пересечения двух плоскостей

$$4x + y - 6z - 2 = 0 \text{ и } y - 3z + 2 = 0.$$

▲ Полагая  $z = 4t$ , где  $t$  — параметр, находим из второго уравнения  $y = 12t - 2$ , а затем из первого уравнения  $x = -(1/4)(y - 6z - 2) = 1 + 3t$ . Итак,  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{12} = \frac{z}{4} = t$  — искомые уравнения. ▼

**Пример 32.** Найдите угол  $\phi$  между прямыми

$$l: \begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0, \\ 3x - y + z = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad L: \begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x + 2y - 5z + 1 = 0. \end{cases}$$

▲ Напишем параметрические уравнения прямой  $l$ , взяв  $z = t$  в качестве параметра. Решая систему  $3x + y = t - 1$ ,  $3x - y = -t$ , находим  $x = -1/6$ ,  $y = t - 1/2$ . Таким образом,  $x = -1/6 + 0 \cdot t$ ,  $y = -1/2 + 1 \cdot t$ ,  $z = 0 + 1 \cdot t$  — искомые параметрические уравнения прямой  $l$ , а вектор  $\mathbf{a} = (0; 1; 1)$  (его координаты — коэффициенты при  $t$  в параметрических уравнениях) — направляющий вектор прямой  $l$ . На прямой  $L$  в качестве параметра выберем  $y = 5t$ . Тогда  $x = -1 + 5t$ ,  $z = (1/5)(2x + 2y + 1) = -1/5 + 4t$ . Вектор

$$\mathbf{b} = (5; 5; 4) — \text{направляющий вектор } L. \text{ Таким образом, } \cos \phi = \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|}{(\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|)} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{2} \sqrt{66}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}, \quad \phi = \arccos \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{11}}. \quad \blacktriangleleft$$

**Пример 33.** Составьте уравнения ортогональной проекции  $l^*$  прямой

$$l: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2} \text{ на плоскость } \mathcal{P}: x + y - 2z + 4 = 0.$$

▲ Точка  $M(x; y; z)$  (рис. 3.34) лежит на прямой  $l^*$  тогда и только тогда, когда: а)  $M \in \mathcal{P}$ , т.е.  $x + y - 2z + 4 = 0$ ; б) при некотором  $t$  точка  $M'(x + t; y + t; z - 2t)$  лежит на прямой  $l$ , т.е.

$$\frac{x+t-1}{1} = \frac{y+t+1}{-1} = \frac{z-2t}{2}.$$

Получена система уравнений

$$x + y - 2z + 4 = 0, \quad x + y = -2t, \quad 2y + z + 2 = 0.$$

Выражая  $x$ ,  $y$  и  $z$  через  $t$ , получаем:

$$x = 2 - (5/2)t, \quad y = -2 + (1/2)t,$$

$$z = 2 - t$$

— искомые параметрические уравнения  $l^*$ . Следовательно,

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

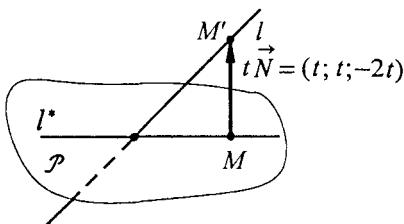


Рис. 3.34

— уравнения  $l^*$ . ▼

**Пример 34.** Найдите проекцию  $Q$  точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  на плоскость  $\mathcal{P}$ :  $Ax + By + Cz + D = 0$ ,  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$  и вектор  $\vec{M_0Q}$ . Напишите уравнения прямой  $(M_0Q)$ .

▲ Вектор  $\vec{N} = (A; B; C)$  перпендикулярен плоскости  $\mathcal{P}$ , поэтому уравнения перпендикуляра  $l = (M_0Q)$  к плоскости  $\mathcal{P}$ , опущенного из точки  $M_0$ , имеют вид

$$x = x_0 + At, \quad y = y_0 + Bt, \quad z = z_0 + Ct, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (3.54)$$

Точка  $Q(x_Q; y_Q; z_Q)$  лежит на этом перпендикуляре, поэтому существует такое число  $t_Q$ , что  $x_Q = x_0 + At_Q$ ,  $y_Q = y_0 + Bt_Q$ ,  $z_Q = z_0 + Ct_Q$ . Чтобы найти  $t_Q$  используем то обстоятельство, что  $Q \in \mathcal{P}$ , т.е.  $Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D = 0$ . Из этого равенства после подстановки  $x_Q$ ,  $y_Q$ ,  $z_Q$  находим

$$t_Q = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}x_Q &= \frac{(B^2 + C^2)x_0 - ABy_0 - ACz_0 - AD}{A^2 + B^2 + C^2}; \\y_Q &= \frac{-ABx_0 + (A^2 + C^2)y_0 - BCz_0 - BD}{A^2 + B^2 + C^2}; \\z_Q &= \frac{-ACx_0 - BCy_0 + (A^2 + B^2)z_0 - CD}{A^2 + B^2 + C^2}; \\\vec{M}_0Q &= -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} \vec{N}.\end{aligned}$$

В силу (3.54) уравнения  $(M_0Q)$ :  $\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$ . ▶

**Пример 35.** Найдите точку  $M^*$ , симметричную точке  $M_0(1; 2; 3)$  относительно плоскости  $\mathcal{P}$ :  $2x - 3y + 5z - 68 = 0$ .

▲ Точка  $M^*(x^*; y^*; z^*)$  лежит на перпендикуляре  $l$ , опущенном из точки  $M_0$  на плоскость  $\mathcal{P}$ . Уравнения  $l$ :  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{5}$ . Следовательно,  $x^* = 1 + 2t$ ,  $y^* = 2 - 3t$ ,  $z^* = 3 + 5t$  при некотором  $t$ . Середина  $Q\left(\frac{1+x^*}{2}; \frac{2+y^*}{2}; \frac{3+z^*}{2}\right)$  отрезка  $[M_0M^*]$  лежит в плоскости  $\mathcal{P}$ , т.е.

$$0 = 2\frac{1+x^*}{2} - 3\frac{2+y^*}{2} + 5\frac{3+z^*}{2} - 68 = 19t - 57.$$

Отсюда  $t = 3$ ,  $x^* = 7$ ,  $y^* = -7$ ,  $z^* = 18$ . ▶

**Пример 36.** В кубе  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  точка  $M$  — середина ребра  $[AD]$ . Какой угол образует с плоскостью грани  $ABCD$  линия пересечения плоскостей  $(AB_1D_1)$  и  $(A_1MC_1)$ ?

▲ Взяв длину ребра куба в качестве единицы длины, рассмотрим прямоугольную систему координат  $\{A_1, \vec{A_1B_1}, \vec{A_1D_1}, \vec{A_1A}\}$ . В этой системе координат  $A_1(0; 0; 0)$ ,  $B_1(1; 0; 0)$ ,  $C_1(1; 1; 0)$ ,  $D_1(0; 1; 0)$ ,  $A(0; 0; 1)$ ,  $M(0; \frac{1}{2}; 1)$ .

Уравнения плоскостей:

$$(AB_1D_1): \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1;$$

$$(A_1MC_1): 0 = \begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 0 - 0 & \frac{1}{2} - 0 & 1 - 0 \\ 1 - 0 & 1 - 0 & 0 - 0 \end{vmatrix} = -x + y - \frac{1}{2}z;$$

$$(ABCD): z = 1, \vec{N} = (0; 0; 1).$$

Параметрические уравнения линии  $l$  пересечения плоскостей  $(AB_1D_1)$  и  $(A_1MC_1)$  найдем, взяв  $t = (1/4)z$  в качестве параметра. Тогда  $x = 1 - 4t - y$ ,  $x = y - 2t$ . Следовательно,  $1 - 4t - y = y - 2t$ , т.е.  $y = 1/2 - t$  и  $x = 1/2 - 3t$  ( $z = 4t$ ). Таким образом,  $\mathbf{a} = (-3; -1; 4)$  — направляющий вектор прямой  $l$ . Искомый угол  $\psi$  находим по формуле (3.53):

$$\sin \psi = \frac{|\langle \mathbf{a}, \vec{N} \rangle|}{\|\mathbf{a}\| \|\vec{N}\|} = \frac{4}{\sqrt{26}}, \quad \psi = \arcsin 2\sqrt{\frac{2}{13}}. \quad \blacktriangleright$$

**Пример 37.** Вычислите длину  $h = |SH|$  высоты треугольной пирамиды  $SABC$ , у которой все углы при вершине  $S$  прямые, а длины боковых ребер  $[SA]$ ,  $[SB]$ ,  $[SC]$  соответственно равны  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

▲ Рассмотрим прямоугольную систему координат  $\{S, \frac{\vec{SA}}{a}, \frac{\vec{SB}}{b}, \frac{\vec{SC}}{c}\}$ .

В этой системе координат  $A(a; 0; 0)$ ,  $B(0; b; 0)$ ,  $C(0; 0; c)$ . По формуле (3.45) уравнение плоскости  $(ABC)$ :  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$ . Длина  $h$  высоты есть расстояние от точки  $S(0; 0; 0)$  до плоскости  $(ABC)$ . По формуле (3.47) имеем  $h = \frac{|0/a + 0/b + 0/c - 1|}{\sqrt{1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2}}$ . Следовательно,

$$h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}. \quad \blacktriangleright$$

**Пример 38.** Катеты  $[AB]$  и  $[AC]$  прямоугольного треугольника  $ABC$  расположены соответственно в гранях  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$  острого двугранного угла величины  $\varphi$ . Прямая  $(AB)$  образует с ребром двугранного угла угол  $\alpha$ . Найдите угол  $\psi$  между этим ребром и прямой  $(AC)$ .

▲ Рассмотрим прямоугольную систему координат (рис. 3.35) с началом  $O$  в точке  $A$ . Ось  $Oy$  направим по ребру двугранного угла, ось  $Ox$  расположим в грани  $\mathcal{P}$  двугранного угла. Ось  $Oz$  направим так, чтобы точки полуплоскости  $Q$  имели положительные аппликаты. Тогда уравнение плоскости, содержащей  $Q$ ,  $-xtg\varphi + z = 0$ .

Если  $B(x_B; y_B; z_B)$ , то из условия  $B \in Q$  имеем  $z_B = x_B \operatorname{tg}\varphi$ . Угол между векторами  $\vec{OB}$  и  $j$  равен  $\alpha$ :  $\cos\alpha = |y_B| / \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}$ . Отсюда  $y_B^2(1 - \cos^2\alpha) = (x_B^2 + z_B^2)\cos^2\alpha = \frac{x_B^2 \cos^2\alpha}{\cos^2\varphi}$ , т.е.  $|y_B| = \frac{|x_B| \operatorname{ctg}\alpha}{\cos\varphi}$ . Точка  $C$  с координатами  $(x_C; y_C; 0)$  удовлетворяет условию  $(\vec{OB}, \vec{OC}) = 0$ , т.е.  $x_B x_C + y_B y_C = 0$ , и, следовательно,

$$|x_C| / |y_C| = |y_B| / |x_B| = \operatorname{ctg}\alpha / \cos\varphi.$$

Поэтому

$$\cos\psi = \left| \frac{(\vec{OC}, j)}{|\vec{OC}||j|} \right| = \frac{|y_C|}{\sqrt{x_C^2 + y_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x_C / y_C)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{ctg}\alpha / \cos\varphi)^2 + 1}},$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\varphi}, \text{ т.е. } \psi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\varphi}. \blacktriangleright$$

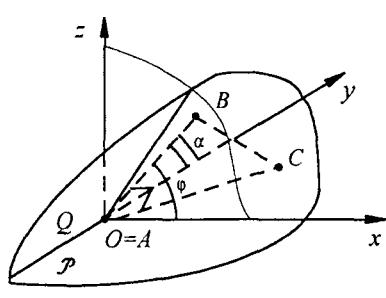


Рис. 3.35

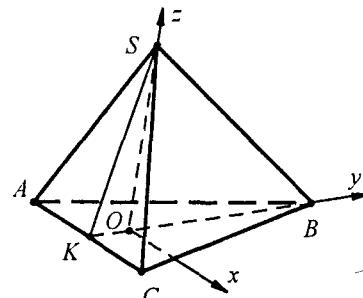


Рис. 3.36

**Пример 39.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  длина ребра основания  $ABC$  равна  $a$ , а угол  $\alpha$  между апофемой и боковой гранью равен  $45^\circ$ . Найдите длину  $h$  высоты пирамиды.

▲ Введем прямоугольную систему координат, выбрав за ее начало  $O$  центр грани  $ABC$  и сонаправив ее оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно с векторами  $\vec{AC}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OS}$  (рис. 3.36). Тогда

$$S(0; 0; h), \quad A\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2\sqrt{3}}; 0\right), \quad B\left(0; \frac{a}{\sqrt{3}}; 0\right), \quad C\left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2\sqrt{3}}; 0\right).$$

Уравнение плоскости ( $BSC$ ):

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x-0 & y-a/\sqrt{3} & z-0 \\ 0-0 & 0-a\sqrt{3} & h-0 \\ a/2-0 & -a/(2\sqrt{3})-a/\sqrt{3} & 0-0 \end{vmatrix} = \\ &= a\left(\frac{h\sqrt{3}}{2}x + \frac{h}{2}\left(y - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) + \frac{a}{2\sqrt{3}}z\right). \end{aligned}$$

В качестве ее нормального вектора можно взять вектор  $\vec{N} = \left(\frac{h\sqrt{3}}{2}; \frac{h}{2}; \frac{a}{2\sqrt{3}}\right)$ ,  $|\vec{N}| = \sqrt{h^2 + a^2 / 12}$ . Вектор  $\vec{SK}$  апофемы грани  $ASC$  равен  $\frac{1}{2}(\vec{SA} + \vec{SC}) = \left(0; -\frac{a}{2\sqrt{3}}; -h\right)$ . Он является направляющим вектором  $a$  прямой ( $SK$ ),  $|a| = \sqrt{h^2 + a^2 / 12}$ . По формуле (3.53)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \alpha = \frac{|(a, \vec{N})|}{|a| |\vec{N}|} = \frac{ah\sqrt{3}/4}{h^2 + a^2 / 12}.$$

Получено уравнение  $h^2 - h(a\sqrt{6}/4) + a^2/12 = 0$ , у которого два решения:  $h_1 = a/\sqrt{6}$  и  $h_2 = a\sqrt{6}/12$ . ▶

**Пример 40\***. В основании треугольной пирамиды  $SABC$  лежит правильный треугольник  $ABC$ . Грань  $SAB$  перпендикулярна плоскости основания,  $\hat{ASB} = \hat{ASC} = 45^\circ$ . Найдите углы  $\Delta SAC$ .

▲ Пусть  $O$  — середина  $[AB]$ ,  $M$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $S$  на плоскость  $(ABC)$  (поскольку плоскости  $(ASB)$  и  $(ABC)$  перпендикулярны,  $M \in (AB)$ ). Взяв за единицу длины длину отрезка  $[OB]$ , рас-

смотрим прямоугольную систему координат (рис. 3.37)  $\left\{O, \frac{\vec{OC}}{\sqrt{3}}, \vec{OB}, \frac{\vec{MS}}{|\vec{MS}|}\right\}$ . В

этой системе координат  $A(0; -1; 0)$ ,  $B(0; 1; 0)$ ,  $C(\sqrt{3}; 0; 0)$ ,  $S(0; m; h)$ , где  $m$  и  $h$  — неизвестные, входящие в соотношения  $\vec{OM} = m\vec{OB}$ ,  $|\vec{MS}| = h|\vec{OB}|$ . Тогда  $\vec{SA} = (0; -1-m; -h)$ ,  $\vec{SB} = (0; 1-m; -h)$ ,  $\vec{SC} = (\sqrt{3}; -m; -h)$ . По условию,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \hat{ASB} = \frac{(\vec{SA}, \vec{SB})}{|\vec{SA}| |\vec{SB}|} = \frac{m^2 - 1 + h^2}{\sqrt{(m+1)^2 + h^2} \sqrt{(m-1)^2 + h^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \hat{ASC} = \frac{(\vec{SA}, \vec{SC})}{|\vec{SA}| |\vec{SC}|} = \frac{m^2 + m + h^2}{\sqrt{(m+1)^2 + h^2} \sqrt{3+m^2+h^2}}.$$

Вводя неизвестную  $\omega = m^2 + h^2$ , приходим к системе уравнений

$$2(\omega - 1)^2 = (\omega + 2m + 1)(\omega - 2m + 1), \quad \omega > 1,$$

$$2(\omega + m)^2 = (\omega + 2m + 1)(\omega + 3), \quad \omega + m > 0.$$

Упрощая уравнения, получаем

$$\omega^2 - 6\omega + 1 + 4m^2 = 0, \quad \omega^2 - 4\omega + 2m\omega + 2m^2 - 6m - 3 = 0.$$

Почленно вычитая и приводя подобные члены, имеем

$$m^2 - m(\omega - 3) + (2 - \omega) = 0,$$

$$m = (1/2)(\omega - 3 \pm \sqrt{\omega^2 - 6\omega + 9 - 8 + 4\omega}) = (\omega - 3 \pm (\omega - 1))/2,$$

т.е. возможны два случая:

$$\text{a) } m = -1, \text{ б) } m = \omega - 2.$$

Если  $m = -1$ , то  $\omega^2 - 6\omega + 5 = 0$ ,  $\omega = 5$  ( $\omega = 1$  не подходит, так как  $\omega > 1$ ). Итак, в случае а)  $m = -1$ ,  $\omega = 5$ ,  $h = \sqrt{\omega - m^2} = 2$ .

В случае б)  $5\omega^2 - 22\omega + 17 = 0$ , т.е.

$$\omega = 17/5, \quad m = 7/5,$$

$$h = \sqrt{\omega - m^2} = 6/5.$$

Найдем углы треугольника  $SAC$ .

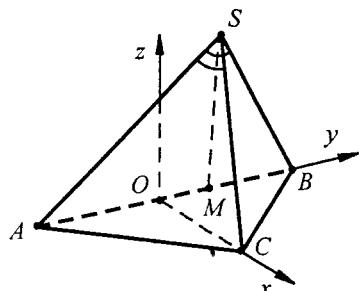


Рис. 3.37

$$\text{a) } \vec{AS} = (0; m+1; h) = (0; 0; 2),$$

$$\vec{AC} = (\sqrt{3}; 1; 0), \quad (\vec{AS}, \vec{AC}) = 0,$$

т.е.  $\hat{SAC} = 90^\circ$ . Так как  $\hat{ASC} = 45^\circ$ , то и  $\hat{SCA} = 45^\circ$ .

$$6) \vec{AS} = (0; 12/5; 6/5) = \frac{6}{5}(0; 2; 1), \quad \vec{AC} = (\sqrt{3}; 1; 0),$$

$$\cos \hat{SAC} = \frac{(\vec{AS}, \vec{AC})}{|\vec{AS}| |\vec{AC}|} = \frac{(6/5)(0 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0)}{(6/5)\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ т.е.}$$

$$\hat{SAC} = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} = \operatorname{arctg} 2.$$

Следовательно,  $\hat{SCA} = 180^\circ - 45^\circ - \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg} 3$ . ▼

**Пример 41\***. В основании наклонного параллелепипеда лежит прямоугольник  $ABCD$ ;  $[AA_1]$ ,  $[BB_1]$ ,  $[CC_1]$ ,  $[DD_1]$  — боковые ребра этого параллелепипеда. Длина стороны  $[AB]$  равна длине высоты параллелепипеда. Сфера с центром в точке  $O$  проходит через вершину  $B$  и касается ребер  $(A_1B_1)$  и  $(DD_1)$  соответственно в точках  $A_1$  и  $D_1$ . Найдите отношение объема параллелепипеда к объему сферы, если  $\hat{A_1OB} = \hat{D_1OB} = 120^\circ$ .

▲ Обозначим  $a = |AB|$ ,  $b = |AD|$ . Выберем прямоугольную систему координат, взяв точку  $A$  за полюс и положив

$$i = \vec{AB}/|AB|, \quad j = \vec{AD}/|AD| \quad (\text{рис. 3.38}).$$

Вектор  $k$  направим так, чтобы точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  лежали по ту же сторону от плоскости  $(ABCD)$ , что и конец вектора  $k$ , если его начало расположено в точке  $A$ . Поскольку длина высоты параллелепипеда равна  $a$ , все точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  лежат в плоскости  $z = a$ . Пусть  $(m; n; a)$  — координаты точки  $A_1$ ,  $(0; b; 0)$  — коор-

динаты точки  $D$ . Тогда  $D_1(m; n+b; a)$ ,  $B(a; 0; 0)$ . Пусть  $(x; y; z)$  — координаты точки  $O$ ,  $R$  — неизвестный радиус сферы. Запишем данные задачи:

$$|OB|^2 = (x - a)^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (3.55)$$

$$|OA_1|^2 = (x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - a)^2 = R^2, \quad (3.56)$$

$$|OD_1|^2 = (x - m)^2 + (y - n - b)^2 + (z - a)^2 = R^2. \quad (3.57)$$

Сфера касается ребер  $(A_1B_1)$  и  $(DD_1)$  в точках  $A_1$  и  $D_1$ , поэтому

$$0 = (\vec{OA_1}, \vec{A_1B_1}) = (\vec{OA_1}, \vec{AB}) = (m - x)a, \quad (3.58)$$

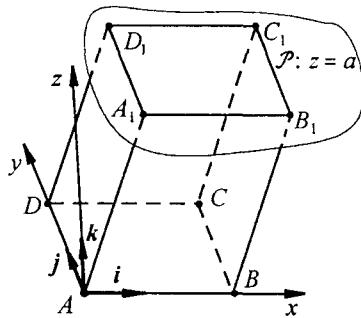


Рис. 3.38

$$0 = (\vec{OD}_1, \vec{DD}_1) = (\vec{OD}_1, \vec{AA}_1) = (m - x)m + (n + b - y)n + (a - z)a. \quad (3.59)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &= \cos 120^\circ = \frac{(\vec{OA}_1, \vec{OB})}{|\vec{OA}_1| |\vec{OB}|} = \frac{(\vec{OA}_1, \vec{OB})}{R^2} = \\ &= \frac{1}{R^2} ((m - x)(a - x) + (y - n)y + (z - a)z), \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{(\vec{OD}_1, \vec{OB})}{|\vec{OD}_1| |\vec{OB}|} = \frac{1}{R^2} ((m - x)(a - x) + (y - n - b)y + (z - a)z). \quad (3.61)$$

Из (3.58) имеем  $m = x$ . Вычитая из уравнения (3.60) уравнение (3.61), найдем  $y = 0$ . Вычитая из уравнения (3.56) уравнение (3.57), получаем  $n = -b/2$ . В результате система упрощается:

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + z^2 &= R^2, \\ b^2 / 4 + (z - a)^2 &= R^2, \\ -b^2 / 4 + a(a - z) &= 0, \\ z(z - a) &= -(1/2)R^2. \end{aligned}$$

Складывая три последних уравнения, находим  $2(z - a)^2 = (1/2)R^2$ , т.е.  $z - a = \pm(1/2)R$ . Тогда  $b^2 / 4 = (3/4)R^2$ ,  $b = R\sqrt{3}$  и  $b^2 / 4 = a(a - z) = \mp(1/2)aR$ . В этом равенстве знак минус невозможен. Следовательно,  $a = b^2 / (2R) = 3R/2$ . Таким образом,

$$\frac{V_{ABCD_1B_1C_1D_1}}{V_{\text{сфера}}} = \frac{a^2 b}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{27\sqrt{3}}{16\pi}. \quad \blacktriangleright$$

**Пример 42.** Длина ребра правильного тетраэдра  $ABCD$  равна  $a$  (рис. 3.39). Точка  $E$  — середина  $[CD]$ , точка  $F$  — середина высоты  $[BL]$  грани  $ABD$ . Отрезок  $[MN]$  с концами на прямых  $(AD)$  и  $(BC)$  пересекает прямую  $(EF)$  и перпендикулярен ей. Найдите длину этого отрезка.

▲ Введем ортогональный базис  $\vec{AD} = \mathbf{a}$ ,  $\vec{BC} = \mathbf{b}$ ,  $\vec{LP} = \mathbf{c}$  ( $P$  — середина отрезка  $[BC]$ ). Тогда  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ ,  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = a$ ,  $|\mathbf{c}| = a/\sqrt{2}$ .

Используя формулу для средней линии пространственного четырехугольника, получаем

$$\vec{FE} = (1/2)(\vec{BC} + \vec{LD}) = \\ = \mathbf{a}/4 + \mathbf{b}/2.$$

Точки  $M$  и  $N$  лежат на прямых  $(AD)$  и  $(BC)$ , поэтому существуют такие числа  $x$  и  $y$ , что  $\vec{PN} = xb$ ,  $\vec{LM} = ya$ , и, значит,

$$\vec{MN} = -\vec{LM} + \vec{LP} + \vec{PN} = -ya + xb + c.$$

Из условия перпендикулярности прямых  $(FE)$  и  $(MN)$  получаем

$$0 = (\vec{FE}, \vec{MN}) = -(1/4)ya^2 + (1/2)xb^2 = (a^2/4)(2x - y),$$

т.е.  $y = 2x$ . Прямые  $(FE)$  и  $(MN)$  пересекаются. Следовательно, векторы  $\vec{FE} = (1/4)\mathbf{a} + (1/2)\mathbf{b}$ ,  $\vec{MN} = -2xa + xb + c$  и  $\vec{ME} = \vec{MD} + \vec{DC}/2 = (1/2 - y)\mathbf{a} + (1/2)(-\mathbf{a}/2 + c + \mathbf{b}/2) = (1/4 - 2x)\mathbf{a} + (1/4)\mathbf{b} + (1/2)c$  компланарны. Согласно признаку компланарности,

$$0 = \begin{vmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 \\ -2x & x & 1 \\ 1/4 - 2x & 1/4 & 1/2 \end{vmatrix} = (1/4) \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1/4 & 1/2 \end{vmatrix} - (1/2) \begin{vmatrix} -2x & 1 \\ 1/4 - 2x & 1/2 \end{vmatrix} = \\ = (1 - 6x)/16.$$

Отсюда  $x = 1/6$ ,  $\vec{MN} = (1/6)(-2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 6c)$ ,

$$|\vec{MN}| = (1/6)\sqrt{4\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 36c^2} = a\sqrt{23}/6. \blacksquare$$

**Пример 43.** Выведите все свойства скалярного произведения, используя теорему косинусов и тот факт, что в ортонормированном базисе  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  длина  $|\mathbf{a}|$  вектора  $\mathbf{a} = (x; y; z)$  равна  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  (оба эти факта выводятся в классической геометрии без использования понятия скалярного произведения и его свойств).

□ Пусть  $\mathbf{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $\mathbf{b} = (x_2; y_2; z_2)$ . Тогда

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$

По теореме косинусов,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (1/2)(|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2) = (1/2)((x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 +$$

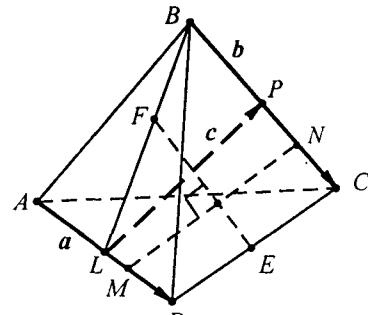


Рис. 3.39

$$+(z_1 + z_2)^2 - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Из этого выражения следует, что  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$ . Так как  $\lambda \mathbf{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$ , то  $(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\lambda x_1) x_2 + (\lambda y_1) y_2 + (\lambda z_1) z_2 = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Наконец, если  $\mathbf{c} = (x'_1; y'_1; z'_1)$ , то  $\mathbf{a} + \mathbf{c} = (x_1 + x'_1; y_1 + y'_1; z_1 + z'_1)$  и  $(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b}) = (x_1 + x'_1) x_2 + (y_1 + y'_1) y_2 + (z_1 + z'_1) z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + x'_1 x_2 + y'_1 y_2 + z'_1 z_2 = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{b})$ . ■

**Пример 44.** Докажите, что для вектора  $\mathbf{a} = (x; y; z)$ , заданного своими координатами в ортонормированном базисе,  $|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

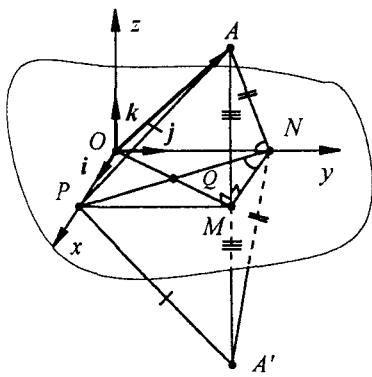


Рис. 3.40

□ Рассмотрим прямоугольную систему координат  $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  (рис. 3.40) и точку  $A$  такую, что  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ , т.е.  $A(x; y; z)$ . Пусть  $M$  — общая точка прямой, которая параллельна оси  $Oz$  и проходит через точку  $A$ , и плоскости  $Oxy$ ;  $N$  — общая точка прямой, проведенной через точку  $M$  параллельно оси  $Ox$ , и оси ординат;  $P$  — точка пересечения прямой, проведенной через точку  $M$  параллельно оси  $Oy$ , с осью абсцисс. Тогда, по определению координат,  $M(x; y; 0)$ ,  $N(0; y; 0)$ ,  $P(x; 0; 0)$ ,

$\vec{MA} = z\mathbf{k}$ ,  $|MA| = |z|$ ,  $\vec{ON} = y\mathbf{j}$ ,  $|ON| = |PM| = |y|$ ,  $\vec{OP} = xi$ ,  $|OP| = |MN| = |x|$ . Векторы  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  ортогональны. Поэтому либо  $M = N$ , либо  $\hat{\angle OMN} = 90^\circ$ . В обоих случаях, учитывая теорему Пифагора, имеем  $|OM| = \sqrt{|ON|^2 + |MN|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Таким образом, если  $A = M$ , т.е.  $z = 0$ , то утверждение доказано. Аналогично доказывается утверждение примера, если точка  $A$  лежит в координатной плоскости  $Oyz$  или в плоскости  $Oxz$ . Рассмотрим случай, когда  $A$  не лежит ни в одной из координатных плоскостей. Тогда  $PONM$  — прямоугольник. Пусть  $Q$  — точка пересечения его диагоналей. Продолжим отрезок  $[AM]$  за точку  $M$  и отложим вектор  $\vec{MA'} = \vec{AM}$ . В  $\Delta A'NA$   $[NM]$  — медиана. Поскольку векторы  $\vec{AA'}$  и  $\vec{NM}$  коллинеарны соответственно  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{i}$ , а  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{i}$  ортогональ-

ны,  $[NM]$  — высота  $\Delta A'NA$ . Следовательно,  $\Delta A'NA$  равнобедренный:  $|AN|=|A'N|$ . Аналогично доказывается, что  $|AP|=|A'P|$ . В  $\Delta PAN$  и  $\Delta PA'N$  стороны попарно равны:  $|PA|=|PA'|$ ,  $|AN|=|A'N|$ ,  $|PN|=|PN|$ .

Следовательно,  $\Delta PAN$  и  $\Delta PA'N$  конгруэнтны и, в частности,  $\hat{ANQ} = \hat{A'NQ}$ . Рассмотрим теперь  $\Delta ANQ$  и  $\Delta A'NQ$ . Имеем  $|AN|=|A'N|$ ,  $|NQ|=|NQ|$ ,

$\hat{ANQ} = \hat{A'NQ}$ . Значит,  $\Delta ANQ$  и  $\Delta A'NQ$  конгруэнтны и, в частности,  $|AQ|=|A'Q|$ . Таким образом,  $\Delta AQA'$  — равнобедренный, а  $[QM]$  — медиана, проведенная к основанию. Следовательно, она является и высотой, т.е.  $\hat{OMA} = 90^\circ$ . Поэтому к  $\Delta OMA$  применима теорема Пифагора:

$$|OA| = |a| = \sqrt{|OM|^2 + |MA|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Утверждение доказано. ■

Основным моментом было доказательство того факта, что если прямая  $(AM)$  перпендикулярна прямым  $(MN)$  и  $(MP)$ , лежащим в плоскости  $Oxy$  и не параллельным друг другу, то  $(AM)$  перпендикулярна и третьей прямой  $(OM)$ , лежащей в плоскости  $Oxy$ , т.е. доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости без использования в доказательстве свойств скалярного произведения.

## ГЛАВА 4. ОРИЕНТАЦИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

### §1. Поворот плоскости

Пусть  $O$  — фиксированная точка плоскости  $\mathcal{P}$ ,  $\varphi$  — заданное действительное число. Преобразование  $R_O^\varphi$  поворота плоскости  $\mathcal{P}$  вокруг точки  $O$  на угол  $\varphi$  ставит в соответствие каждой точке  $M$  плоскости  $\mathcal{P}$  точку  $M' = R_O^\varphi(M)$  этой же плоскости по следующему правилу. По определению полагают  $R_O^\varphi(O) = O$ . Если  $M \neq O$ , то точка  $M' = R_O^\varphi(M)$  является концом вектора, полученного поворотом вектора  $OM$  вокруг точки  $O$  на угол  $|\varphi|$  радиан в положительном направлении (против часовой стрелки), если  $\varphi \geq 0$ , и соответственно в отрицательном направлении (по часовой стрелке), если  $\varphi < 0$ .