

ны, $[NM]$ — высота $\Delta A'NA$. Следовательно, $\Delta A'NA$ равнобедренный: $|AN|=|A'N|$. Аналогично доказывается, что $|AP|=|A'P|$. В ΔPAN и $\Delta PA'N$ стороны попарно равны: $|PA|=|PA'|$, $|AN|=|A'N|$, $|PN|=|PN|$.

Следовательно, ΔPAN и $\Delta PA'N$ конгруэнтны и, в частности, $\hat{ANQ} = \hat{A'NQ}$. Рассмотрим теперь ΔANQ и $\Delta A'NQ$. Имеем $|AN|=|A'N|$, $|NQ|=|NQ|$,

$\hat{ANQ} = \hat{A'NQ}$. Значит, ΔANQ и $\Delta A'NQ$ конгруэнтны и, в частности, $|AQ|=|A'Q|$. Таким образом, $\Delta AQA'$ — равнобедренный, а $[QM]$ — медиана, проведенная к основанию. Следовательно, она является и высотой, т.е. $\hat{OMA} = 90^\circ$. Поэтому к ΔOMA применима теорема Пифагора:

$$|OA| = |a| = \sqrt{|OM|^2 + |MA|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Утверждение доказано. ■

Основным моментом было доказательство того факта, что если прямая (AM) перпендикулярна прямым (MN) и (MP) , лежащим в плоскости Oxy и не параллельным друг другу, то (AM) перпендикулярна и третьей прямой (OM) , лежащей в плоскости Oxy , т.е. доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости без использования в доказательстве свойств скалярного произведения.

ГЛАВА 4. ОРИЕНТАЦИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

§1. Поворот плоскости

Пусть O — фиксированная точка плоскости \mathcal{P} , φ — заданное действительное число. Преобразование R_O^φ поворота плоскости \mathcal{P} вокруг точки O на угол φ ставит в соответствие каждой точке M плоскости \mathcal{P} точку $M' = R_O^\varphi(M)$ этой же плоскости по следующему правилу. По определению полагают $R_O^\varphi(O) = O$. Если $M \neq O$, то точка $M' = R_O^\varphi(M)$ является концом вектора, полученного поворотом вектора OM вокруг точки O на угол $|\varphi|$ радиан в положительном направлении (против часовой стрелки), если $\varphi \geq 0$, и соответственно в отрицательном направлении (по часовой стрелке), если $\varphi < 0$.

Из определения следует, что

$$R_O^{\varphi_1 + \varphi_2}(M) = R_O^{\varphi_1}(R_O^{\varphi_2}(M)). \quad (4.1)$$

Точка O называется *центром поворота*. Величина φ называется *углом поворота*.

При повороте плоскости вокруг точки O на угол φ все точки луча $[OM]$ переходят в точки луча $[OM']$.

Поскольку $|OM| = |OM'|$, центр поворота точки O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MM' . Угол между векторами \vec{OM} и \vec{OM}' , очевидно, равен $\arccos(\cos\varphi)$.

Пример 1. На плоскости \mathcal{P} задана прямоугольная система координат. Выясните, существует ли преобразование поворота плоскости \mathcal{P} , переводящее точку $A(2; 3)$ в точку $A'(3; 2)$, а точку $B(-1; 7)$ в точку $B'(5; 5)$.

□ Предполагая, что такой поворот существует, найдем центр O поворота, который является точкой пересечения серединных перпендикуляров l и L соответственно к отрезкам AA' и BB' . Все точки $Q(x; y)$ серединного перпендикуляра l и только они обладают тем свойством, что $|QA| = |QA'|$. В координатах это равенство имеет вид

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (x - 3)^2 + (y - 2)^2.$$

После упрощений получаем уравнение прямой l : $x - y = 0$. Аналогично находим уравнение серединного перпендикуляра L к отрезку BB' : $3x - y = 0$.

Общей точкой прямых l и L является точка $O(0; 0)$. Найдем угол искомого поворота. Косинус угла α между векторами \vec{OA} и \vec{OA}' находим по формуле

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{OA}, \vec{OA}')}{| \vec{OA} \| \vec{OA}' |} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 3^2} \sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{12}{13}.$$

Величина угла β между векторами \vec{OB} и \vec{OB}' удовлетворяет равенству

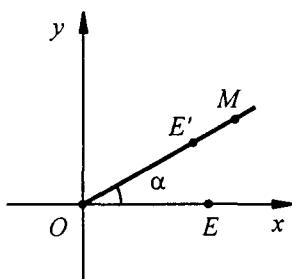
$$\cos\beta = \frac{(\vec{OB}, \vec{OB}')}{| \vec{OB} \| \vec{OB}' |} = \frac{(-1) \cdot 5 + 7 \cdot 5}{\sqrt{(-1)^2 + 7^2} \sqrt{5^2 + 5^2}} = \frac{3}{5}.$$

Если бы искомый поворот (на некоторый угол ϕ) существовал, то имели бы место равенства $\frac{3}{5} = \cos \beta = \cos \varphi = \cos \alpha = \frac{12}{13}$, что невозможно. Следовательно, поворота плоскости, удовлетворяющего заданным требованиям, не существует. ■

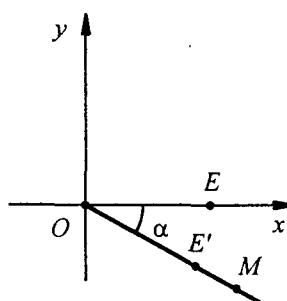
§2. Полярные координаты на плоскости

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат $(O; i, j)$, удовлетворяющая следующему условию: кратчайший поворот от вектора i к вектору j происходит против часовой стрелки. Обозначим через $E(1; 0)$ единичную точку оси абсцисс. Поворот плоскости вокруг начала координат O на угол φ переводит точку E в точку $E'(\cos \varphi; \sin \varphi)$.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка плоскости, $\vec{r} = \vec{OM}$ — ее радиус-вектор, $r = |\vec{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — его длина. Обозначим через α угол между векторами \vec{OE} и \vec{OM} (если $M = O$, то под α условимся понимать любой угол). Тогда вектор \vec{OM} можно получить следующим образом. Повернуть вектор \vec{OE} на угол $\varphi = \alpha$ или $\varphi = -\alpha$ так, чтобы после поворота получи $[\vec{OE}']$ (здесь $E' = R_O^\varphi(E)$) и $[\vec{OM}]$ совпали (рис. 4.1).



а)



б)

Рис. 4.1