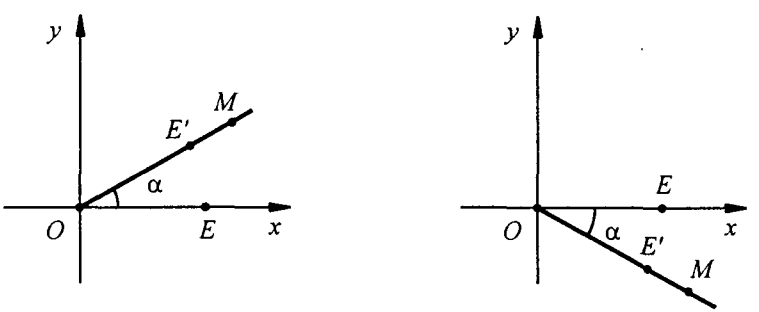
Если бы искомый поворот (на некоторый угол φ) существовал, то имели бы место равенства $\frac{3}{5} = \cos\beta = \cos\varphi = \cos\alpha = \frac{12}{13}$, что невозможно. Следовательно, поворота плоскости, удовлетворяющего заданным требованиям, не существует. ■

§2. Полярные координаты на плоскости

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$, удовлетворяющая следующему условию: кратчайший поворот от вектора $\boldsymbol{i}$ к вектору $\boldsymbol{j}$ происходит против часовой стрелки. Обозначим через $E(1; 0)$ единичную точку оси абсцисс. Поворот плоскости вокруг начала координат O на угол φ переводит точку E в точку E' $(\cos\varphi; \sin\varphi)$. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка плоскости, $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ — ее радиус-вектор, $\boldsymbol{r} = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — его длина. Обозначим через α угол между векторами $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{OM}$ (если $M = O$, то под α условимся понимать любой угол). Тогда вектор $\overrightarrow{OM}$ можно получить следующим образом. Повернуть вектор $\overrightarrow{OE}$ на угол $\varphi = \alpha$ или $\varphi = -\alpha$ так, чтобы после поворота лучи $[\overrightarrow{OE'})$ (здесь $E' = R_O^{\varphi}(E)$) и $[OM)$ совпали (рис. 4.1).



а) б)

Рис. 4.1

Затем следует умножить вектор $\overrightarrow{OE'} = (\cos\varphi; \sin\varphi)$ на число r и получить вектор $\overrightarrow{OM}$. Тогда по свойству координат $\overrightarrow{OM} = (r\cos\varphi; r\sin\varphi)$. Поэтому

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = \sin\varphi. \tag{4.2}$$

Все пары чисел $r \geq 0$ и φ, определяемые этими равенствами, называются *полярными координатами точки* M *в системе координат* $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$. Число $r \geq 0$ называют *полярным радиусом*, а число φ — *полярным углом* точки M. Если величина $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ ($r = |OM|$) определяется указанными равенствами однозначно, то величина полярного угла этими равенствами определяется лишь с точностью до слагаемого вида $2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (рис. 4.2).

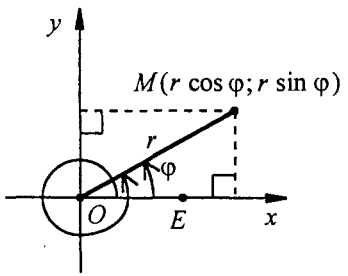


Рис. 4.2

Пример 1 (нормальное уравнение прямой в полярных координатах). Докажите, что уравнение всякой прямой в полярных координатах имеет вид

$$r\cos(\varphi - \varphi_0) = d_0, \tag{4.3}$$

где d_0 и φ_0 — некоторые постоянные.

□ Обозначим через $\boldsymbol{n}$ единичный нормальный вектор прямой. Этот вектор может быть получен из вектора $\overrightarrow{OE}$ поворотом на некоторый угол φ_0, так что $\boldsymbol{n} = (\cos\varphi_0; \sin\varphi_0)$. Поэтому нормальное уравнение прямой имеет вид

$$x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 = d_0.$$

Подставляя сюда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, получаем

$$r\cos\varphi\cos\varphi_0 + r\sin\varphi\sin\varphi_0 = d_0, \text{ или } r\cos(\varphi - \varphi_0) = d_0. \ ■$$

§3. Переход от одной прямоугольной системы координат на плоскости к другой

Пусть на плоскости заданы две прямоугольные системы координат: "старая" — $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ и "новая"— $\{O'; \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'\}$. Будем предполагать, что крат-