Затем следует умножить вектор $\overrightarrow{OE'} = (\cos\varphi; \sin\varphi)$ на число r и получить вектор $\overrightarrow{OM}$. Тогда по свойству координат $\overrightarrow{OM} = (r\cos\varphi; r\sin\varphi)$. Поэтому

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = \sin\varphi. \tag{4.2}$$

Все пары чисел $r \geq 0$ и φ, определяемые этими равенствами, называются *полярными координатами точки* M *в системе координат* $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$. Число $r \geq 0$ называют *полярным радиусом*, а число φ — *полярным углом* точки M. Если величина $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ ($r = |OM|$) определяется указанными равенствами однозначно, то величина полярного угла этими равенствами определяется лишь с точностью до слагаемого вида $2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (рис. 4.2).

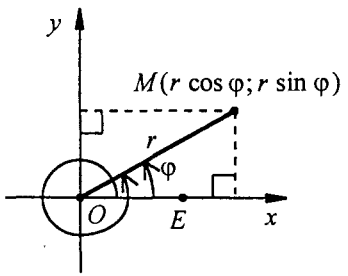

Рис. 4.2

Пример 1 (нормальное уравнение прямой в полярных координатах). Докажите, что уравнение всякой прямой в полярных координатах имеет вид

$$r\cos(\varphi - \varphi_0) = d_0, \tag{4.3}$$

где d_0 и φ_0 — некоторые постоянные.

□ Обозначим через $\boldsymbol{n}$ единичный нормальный вектор прямой. Этот вектор может быть получен из вектора $\overrightarrow{OE}$ поворотом на некоторый угол φ_0, так что $\boldsymbol{n} = (\cos\varphi_0; \sin\varphi_0)$. Поэтому нормальное уравнение прямой имеет вид

$$x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 = d_0.$$

Подставляя сюда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, получаем

$$r\cos\varphi\cos\varphi_0 + r\sin\varphi\sin\varphi_0 = d_0, \text{ или } r\cos(\varphi - \varphi_0) = d_0. \ ■$$

§3. Переход от одной прямоугольной системы координат на плоскости к другой

Пусть на плоскости заданы две прямоугольные системы координат: "старая" — $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ и "новая"— $\{O'; \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'\}$. Будем предполагать, что крат-

чайший поворот от вектора $\boldsymbol{i}$ "старой" системы к вектору $\boldsymbol{j}$ той же системы происходит против часовой стрелки.

Вектор $\boldsymbol{i}'$ — единичный. Он может быть получен из вектора $\boldsymbol{i}$ поворотом на некоторый угол φ (рис. 4.3 а, б), так что

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi.$$

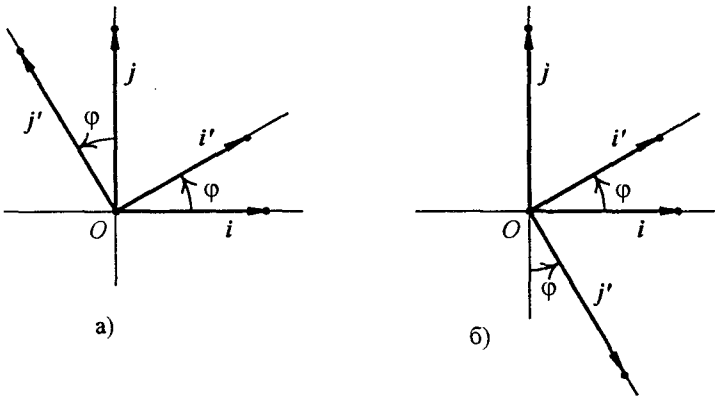

Рис. 4.3

Вектор $\boldsymbol{j}'$ получается тогда поворотом вектора $\boldsymbol{i}$ на угол $\varphi \pm \frac{\pi}{2}$, причем знак плюс берется тогда, когда кратчайший поворот от $\boldsymbol{i}'$ к $\boldsymbol{j}'$ происходит против часовой стрелки (рис. 4.3,а — 4.4,а), а знак минус — тогда, когда кратчайший поворот от $\boldsymbol{i}'$ к $\boldsymbol{j}'$ происходит по часовой стрелке (рис. 4.3,б — 4.4,б). Следовательно,

$$\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{i}(\cos\varphi \pm \frac{\pi}{2}) + \boldsymbol{j}\sin(\varphi \pm \frac{\pi}{2}) = \mp\boldsymbol{i}\sin\varphi \pm \boldsymbol{j}\cos\varphi.$$

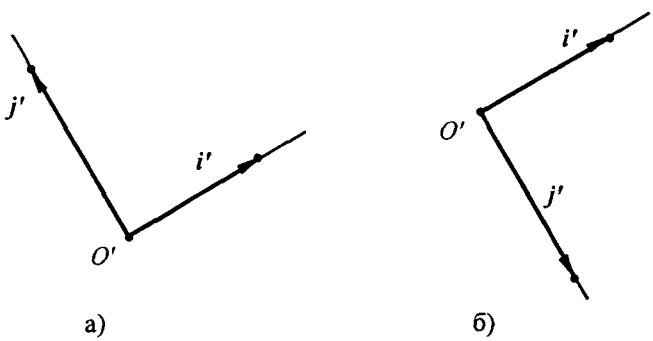

Рис. 4.4

По формулам перехода от "старой" системы к "новой" получаем (см. §7, гл. 2)

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi \mp y'\sin\varphi + a, \\ y &= x'\sin\varphi \pm y'\cos\varphi + b. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь (a,b) — координаты точки O' в "старой" системе координат.

§4. Ориентация тройки векторов

Пусть $\{e_1,e_2,e_3\}$ и $\{e_1',e_2',e_3'\}$ — два базиса в пространстве и пусть $S(S')$ — матрица перехода от первого базиса ко второму (от второго — к первому, см. §7, гл.2). Говорят, что базис $\{e_1',e_2',e_3'\}$ имеет *ту же ориентацию,* что и базис $\{e_1,e_2,e_3\}$, если $\det S > 0$. При этом пишут $\{e_1',e_2',e_3'\} \sim \{e_1,e_2,e_3\}$. Из свойств матрицы перехода (см. §7, гл.2) следует, что: 1°) $\{e_1,e_2,e_3\} \sim \{e_1,e_2,e_3\}$ и 2°) $\{e_1,e_2,e_3\} \sim \{e_1',e_2',e_3'\}$, если $\{e_1',e_2',e_3'\} \sim \{e_1,e_2,e_3\}$. Поэтому говорят об *одинаково ориентированных* базисах $\{e_1,e_2,e_3\}$ и $\{e_1',e_2',e_3'\}$, если $\{e_1,e_2,e_3\} \sim \{e_1',e_2',e_3'\}$. Если два базиса $\{e_1,e_2,e_3\}$ и $\{e_1',e_2',e_3'\}$ не являются одинаково ориентированными, то говорят, что они *противоположно ориентированы*, и пишут

$$\{e_1,e_2,e_3\} \approx \{e_1',e_2',e_3'\}.$$

Из свойств матрицы перехода от базиса к базису вытекает также, что: 3°) если $\{e_1,e_2,e_3\} \sim \{e_1',e_2',e_3'\}$ и $\{e_1',e_2',e_3'\} \sim \{e_1'',e_2'',e_3''\}$, то $\{e_1,e_2,e_3\} \sim \{e_1'',e_2'',e_3''\}$. Таким образом, отношение $\sim$ является *отношением эквивалентности* (см. свойства 1° — 3°)) во множестве всех базисов в пространстве. Поскольку $\{e_1,e_2,e_3\} \sim \{e_1'',e_2'',e_3''\}$, если

$$\{e_1,e_2,e_3\} \approx \{e_1',e_2',e_3'\} \text{ и } \{e_1'',e_2'',e_3''\} \approx \{e_1',e_2',e_3'\},$$

множество базисов в пространстве разбивается отношением $\sim$ на *два* непересекающихся множества (*класса эквивалентности*) так, что всякий базис принадлежит одному и только одному классу. Два базиса, принадлежащие одному классу, одинаково ориентированы, любые два базиса, принадлежащие разным классам, противоположно ориентированы. Один из классов называется классом *правых* базисов (принадлежащие ему базисы называются *правыми* базисами, не принадлежащие — *левыми*). Обычно класс правых базисов выбирают так, что *всякий правый базис* $\{e_1,e_2,e_3\}$ *удовлетворяет следующему требованию: если базисные векторы отложить от одной*