По формулам перехода от "старой" системы к "новой" получаем (см. §7, гл. 2)

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi \mp y'\sin\varphi + a, \\ y &= x'\sin\varphi \pm y'\cos\varphi + b. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь (a,b) — координаты точки O' в "старой" системе координат.

§4. Ориентация тройки векторов

Пусть $\{e_1,e_2,e_3\}$ и $\{e_1',e_2',e_3'\}$ — два базиса в пространстве и пусть $S(S')$ — матрица перехода от первого базиса ко второму (от второго — к первому, см. §7, гл.2). Говорят, что базис $\{e_1',e_2',e_3'\}$ имеет *ту же ориентацию,* что и базис $\{e_1,e_2,e_3\}$, если $\det S > 0$. При этом пишут $\{e_1',e_2',e_3'\} \sim \{e_1,e_2,e_3\}$. Из свойств матрицы перехода (см. §7, гл.2) следует, что: 1°) $\{e_1,e_2,e_3\} \sim \{e_1,e_2,e_3\}$ и 2°) $\{e_1,e_2,e_3\} \sim \{e_1',e_2',e_3'\}$, если $\{e_1',e_2',e_3'\} \sim \{e_1,e_2,e_3\}$. Поэтому говорят об *одинаково ориентированных* базисах $\{e_1,e_2,e_3\}$ и $\{e_1',e_2',e_3'\}$, если $\{e_1,e_2,e_3\} \sim \{e_1',e_2',e_3'\}$. Если два базиса $\{e_1,e_2,e_3\}$ и $\{e_1',e_2',e_3'\}$ не являются одинаково ориентированными, то говорят, что они *противоположно ориентированы*, и пишут

$$\{e_1,e_2,e_3\} \approx \{e_1',e_2',e_3'\}.$$

Из свойств матрицы перехода от базиса к базису вытекает также, что: 3°) если $\{e_1,e_2,e_3\} \sim \{e_1',e_2',e_3'\}$ и $\{e_1',e_2',e_3'\} \sim \{e_1'',e_2'',e_3''\}$, то $\{e_1,e_2,e_3\} \sim \{e_1'',e_2'',e_3''\}$. Таким образом, отношение $\sim$ является *отношением эквивалентности* (см. свойства 1° — 3°)) во множестве всех базисов в пространстве. Поскольку $\{e_1,e_2,e_3\} \sim \{e_1'',e_2'',e_3''\}$, если

$$\{e_1,e_2,e_3\} \approx \{e_1',e_2',e_3'\} \text{ и } \{e_1'',e_2'',e_3''\} \approx \{e_1',e_2',e_3'\},$$

множество базисов в пространстве разбивается отношением $\sim$ на *два* непересекающихся множества (*класса эквивалентности*) так, что всякий базис принадлежит одному и только одному классу. Два базиса, принадлежащие одному классу, одинаково ориентированы, любые два базиса, принадлежащие разным классам, противоположно ориентированы. Один из классов называется классом *правых* базисов (принадлежащие ему базисы называются *правыми* базисами, не принадлежащие — *левыми*). Обычно класс правых базисов выбирают так, что *всякий правый базис* $\{e_1,e_2,e_3\}$ *удовлетворяет следующему требованию: если базисные векторы отложить от одной*

точки и положить $\boldsymbol{e}_1^* = \dfrac{|\boldsymbol{e}_1|}{|\boldsymbol{e}_2|}\boldsymbol{e}_2$, *то кратчайший поворот вектора* $\boldsymbol{e}_1$ *вокруг этой точки в плоскости векторов* $\boldsymbol{e}_1$ *и* $\boldsymbol{e}_2$ *до совмещения с вектором* $\boldsymbol{e}_1^*$ *осуществляется против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора* $\boldsymbol{e}_3$ (рис. 4.5, 4.6).

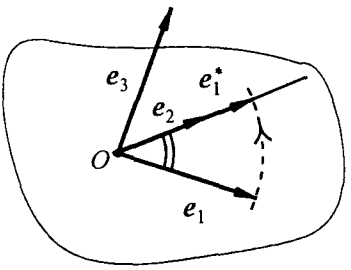

Рис. 4.5

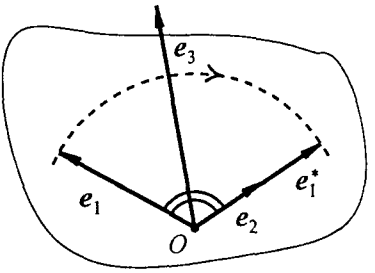

Рис. 4.6

Пример 1. Пусть $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ — базис. Докажите, что:

1) $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},-\boldsymbol{c}\} \approx \{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$;

2) $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\} \sim \{\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\} \sim \{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\} \approx \{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\}$ и $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\} \sim \{\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\} \sim \{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\}$.

▲ 1) Матрица S перехода от базиса $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ к базису $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},-\boldsymbol{c}\}$ равна

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det S = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

$$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},-\boldsymbol{c}\} \approx \{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}.$$

2) Матрицы S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 перехода от базиса $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ соответственно к базисам $\{\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$, $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\}$, $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\}$, $\{\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\}$, $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\}$ равны:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det S_1 = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad \{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\} \sim \{\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\};$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \det S_2 = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \ \{a,b,c\} \sim \{b,c,a\};$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \det S_3 = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \ \{a,b,c\} \nsim \{b,a,c\};$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \det S_4 = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \ \{b,a,c\} \sim \{c,b,a\};$$

$$S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \det S_5 = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \ \{b,a,c\} \sim \{a,c,b\}. \ \blacktriangledown$$

Говорят, что на одной плоскости два базиса $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_1', e_2'\}$ имеют *одинаковую ориентацию*, и пишут $\{e_1', e_2'\} \sim \{e_1, e_2\}$, если $\det S > 0$, или, что то же, $\det S' > 0$, где S и S' — матрицы перехода соответственно от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{e_1', e_2'\}$ и от базиса $\{e_1', e_2'\}$ к базису $\{e_1, e_2\}$. Как и в случае пространства, отношение $\sim$ является *отношением эквивалентности во множестве всех базисов одной плоскости.* Данное отношение разбивает это множество на два класса: класс *правых* и класс *левых* базисов. *В правом базисе кратчайший поворот от* e_1 *к* e_2 *осуществляется против часовой стрелки, в левом базисе — по часовой стрелке.*

Условимся всюду в дальнейшем обозначать через $\{i, j, k\}$ ($\{i, j\}$) правый ортонормированный базис в пространстве (в плоскости).

Класс правых ортонормированных базисов в плоскости (в пространстве), однозначно определенный любым своим представителем, называется положительной *ориентацией на плоскости* (*в пространстве*). Если задан какой-нибудь правый базис $\{i, j\}$ ($\{i, j, k\}$), то говорят, что на плоскости (в пространстве) с помощью базиса $\{i, j\}$ ($\{i, j, k\}$) задана положительная ориентация. Плоскость (пространство) при этом называют *ориентированной* (*ориентированным*). Ориентацию, задаваемую левым ортонормированным базисом, называют *отрицательной.*