§5. Цилиндрические и сферические координаты точки в пространстве

Пусть $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ — правый ортонормированный базис в пространстве, $\{O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ — прямоугольная система координат. Пусть $M(x;y;z)$ — произвольная точка пространства (рис. 4.7). Обозначим через $M^*(x;y;0)$ проекцию точки M на плоскость Oxy. Пусть $r = |OM^*| = \sqrt{x^2+y^2}$ и φ — полярные координаты точки M^* в системе координат $\{O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$. Числа $(r;\varphi;z)$ называются *цилиндрическими координатами точки M в системе координат $\{O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$*. Они связаны с обычными координатами формулами

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z. \qquad (4.5)$$

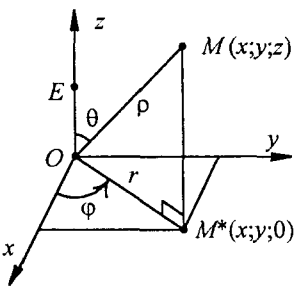

Рис. 4.7

Обозначим через θ $(0 \le \theta \le \pi)$ угол между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OE}$, где $E(0;\ 0;\ 1)$ — единичная точка оси Oz. Тогда, полагая $\rho = |OM|$, получаем из треугольника OMM^* (см. рис. 4.7) $r = \rho\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$, и поэтому

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= \rho\cos\theta. \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Набор чисел $\rho \ge 0$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, удовлетворяющих этим равенствам, называют *сферическими координатами точки M в системе координат $\{O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$*.

ГЛАВА 5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

§1. Комплексные числа и действия над ними

Рассмотрим множество **C**, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары z действительных чисел: $(a;b)$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$. Введем в этом множестве понятие равенства элементов и определим основные арифметические операции (действия) следующим образом.

Пусть z_1 — упорядоченная пара $(a_1;b_1)$, а z_2 — упорядоченная пара $(a_2;b_2)$. Говорят, что упорядоченные пары z_1 и z_2 *равны*, и пишут $z_1 = z_2$ в том и только в том случае, когда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Иными словами, $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда и z_1 и z_2 представляют собой одну и ту же упорядоченную пару действительных чисел.

Суммой $z_1 + z_2$ упорядоченных пар $z_1 = (a_1;b_1)$ и $z_2 = (a_2;b_2)$ называется упорядоченная пара $(a_1 + a_2;\ b_1 + b_2)$. *Произведением* $z_1 z_2$ упорядоченных пар z_1 и z_2 называется упорядоченная пара

$$(a_1a_2 - b_1b_2;\ a_1b_2 + b_1a_2).$$

Например, если $z_1 = (1;\ 2)$, $z_2 = (5;-3)$, то

$$z_1 + z_2 = (1+5;\ 2+(-3)) = (6;\ -1),$$

$$z_1z_2 = (1\cdot 5 - 2\cdot(-3);\ 1\cdot(-3) + 2\cdot 5) = (11;\ 7).$$

Разностью $z_1 - z_2$ упорядоченных пар z_1 и z_2 называется упорядоченная пара $(a_1 - a_2;\ b_1 - b_2)$. Если $a_2^2 + b_2^2 > 0$, то *частным* $\dfrac{z_1}{z_2}$ упорядоченных пар z_1 и z_2 называется упорядоченная пара

$$\left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2};\ \frac{-a_1b_2 + b_1a_2}{a_2^2 + b_2^2}\right).$$

Например, если $z_1 = (0;\ 5)$, $z_2 = (1;-2)$, то

$$z_1 - z_2 = (0-1;\ 5-(-2)) = (-1;\ 7),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(0;5)}{(1;-2)} = \left(\frac{0\cdot 1 + 5\cdot(-2)}{1^2 + (-2)^2};\ \frac{-0\cdot(-2) + 5\cdot 1}{1^2 + (-2)^2}\right) = (-2;\ 1).$$

Множество $\mathbf{C}$ упорядоченных пар $z = (a;b)$ действительных чисел $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, в котором понятие равенства элементов и арифметические операции введены указанным выше способом, называется множеством *комплексных чисел*. Всякий элемент $z = (a;b) \in \mathbf{C}$ называется *комплексным числом*.

Комплексное число вида $(a;0)$, где a — действительное число, отождествляют с самим действительным числом a и обозначают той же буквой, то есть пишут $(a;0) = a \in \mathbf{R}$. При таком отождествлении операции с

действительными числами и соответствующими им комплексными числами согласованы: если $a_1 \in \mathbf{R}$, $a_2 \in \mathbf{R}$, то

$$(a_1;\,0) \pm (a_2;\,0) = (a_1 \pm a_2;\,0) = a_1 \pm a_2,$$

$$(a_1;\,0)\cdot(a_2;\,0) = (a_1a_2 - 0\cdot 0;\, a_1\cdot 0 + 0\cdot a_2) = (a_1a_2;\,0) = a_1a_2,$$

$$a_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{(a_1;\,0)}{(a_2;\,0)} = \left(\frac{a_1a_2 + 0\cdot 0}{a_2^2 + 0^2};\ \frac{-a_1\cdot 0 + 0\cdot a_2}{a_2^2 + 0^2}\right) = \left(\frac{a_1}{a_2};\,0\right) = \frac{a_1}{a_2}.$$

Комплексное число $(0;\,1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается i:

$$i = (0;\,1).$$

Комплексное число $0 = (0;\,0)$ называется *нулем.*

Элементы множества $\mathbf{C}$ иногда сокращенно называют числами (если ясно, что речь идет именно о комплексных числах).

Операции нахождения суммы и разности комплексных чисел z_1 и z_2 называются соответственно сложением и вычитанием чисел z_1 и z_2, а операции нахождения произведения и частного комплексных чисел z_1 и z_2 — соответственно умножением и делением числа z_1 на z_2. Деление комплексного числа z на комплексное число 0 не определяется. Произведение комплексных чисел z_1 и z_2 иногда обозначают также $z_1\cdot z_2$. Для любого натурального числа n *степень* z^n комплексного числа z определяется по индукции следующим образом:

$$z^1 = z,\ \ z^n = z\cdot z^{n-1},\ \ n \geq 2.$$

Если $z = (a;b)$ — комплексное число, то комплексное число $(-a;\,-b)$ называется *противоположным* комплексному числу z и обозначается $-z$, комплексное число $(a;\,-b)$ называется *комплексно сопряженным* числу z и обозначается $\bar{z}$. Модулем $|z|$ комплексного числа $z = (a;b)$ называется неотрицательное действительное число $\sqrt{a^2+b^2}$. Таким образом,

$$z = (a;b) \Rightarrow -z = (-a;-b),\ \ \bar{z} = (a;-b),\ \ |z| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Если $z = (a;0) = a \in \mathbf{R}$, то $|z| = \sqrt{a^2+0^2} = |a|$, то есть модуль комплексного числа, отождествляемого с действительным числом a, равен абсолютной величине действительного числа a.

Пример 1. Докажите, что если $z = -z$, то $z = 0$; если $z = \bar{z}$, то $z \in \mathbf{R}$.

▲ Пусть $z = (a;b)$, $z = -z$, то есть $(a;b) = (-a;-b)$. По определению равенства комплексных чисел $a = -a$, $b = -b$, $2a = 2b = 0$. Таким образом, $a = b = 0$, $z = (a;b) = (0;0) = 0$.

Если $z = \bar{z}$, то есть $(a;b) = (a;-b)$, то $a = a$, $b = -b$. В этом случае $2b = 0$, $b = 0$. Это значит, что $z = (a;\, b) = (a;\, 0) = a \in \mathbf{R}$. ▼

Пример 2. Докажите, что для любых действительных чисел c и d ($d \neq 0$) и любого комплексного числа $z = (a;b)$ выполнены равенства

$$cz = (ca;cb), \qquad \frac{z}{d} = \left(\frac{a}{d};\frac{b}{d}\right) \tag{5.1}$$

(в правой части этих равенств c и d понимаются как действительные числа, а в левой — как комплексные числа $(c;\, 0)$ и $(d;\, 0)$).

▲ Имеем $c \cdot z = (c;0)(a;b) = (ca - 0 \cdot b; cb + 0 \cdot a) = (ca;cb)$,

$$\frac{z}{d} = \frac{(a;b)}{(d;0)} = \left(\frac{ad + b \cdot 0}{d^2 + 0^2}; \frac{-a \cdot 0 + bd}{d^2 + 0^2}\right) = \left(\frac{a}{d};\frac{b}{d}\right). \text{ ▼}$$

Из формулы (5.1), в частности, следует, что

$$1 \cdot z = (1 \cdot a;\, 1 \cdot b) = (a;b) = z, \quad (-1) \cdot z = ((-1) \cdot a;\, (-1) \cdot b) =$$

$$= (-a;\, -b) = -z, \quad \frac{z}{1} = \left(\frac{a}{1};\frac{b}{1}\right) = (a;b) = z, \quad \frac{z}{-1} = \left(\frac{a}{-1};\frac{b}{-1}\right) = \tag{5.2}$$

$$= (-a;-b) = -z.$$

Пример 3. Докажите, что для любых комплексных чисел $z_1 = (a_1;b_1)$ и $z_2 = (a_2;b_2)$ выполнены соотношения (здесь и далее действия, заключенные в скобки, выполняются первыми)

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2); \tag{5.3}$$

$$z_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z_2} = \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}. \tag{5.4}$$

▲ Действительно,

$$z_1 + (-z_2) = (a_1;b_1) + (-a_2;-b_2) = (a_1 + (-a_2);\, b_1 + (-b_2)) =$$

$$= (a_1 - a_2;\, b_1 - b_2) = z_1 - z_2.$$

Далее,

$$\frac{1}{z_2}=\frac{(1;0)}{(a_2;b_2)}=\left(\frac{1\cdot a_2+0\cdot b_2}{a_2^2+b_2^2};\frac{-1\cdot b_2+0\cdot a_2}{a_2^2+b_2^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{a_2}{a_2^2+b_2^2};\frac{-b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)=\left(\frac{a_2}{|z_2|^2};\frac{-b_2}{|z_2|^2}\right).$$

По формуле (5.1)

$$\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a_2;-b_2)}{|z_2|^2}=\left(\frac{a_2}{|z_2|^2};\frac{-b_2}{|z_2|^2}\right)=\frac{1}{z_2}.$$

Наконец,

$$\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a_1;b_1)\cdot(a_2;-b_2)}{|z_2|^2}=\frac{(a_1a_2-b_1\cdot(-b_2);a_1\cdot(-b_2)+b_1a_2)}{|z_2|^2}=$$

$$=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{|z_2|^2};\frac{-a_1b_2+b_1a_2}{|z_2|^2}\right)=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2};\frac{-a_1b_2+b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}\right)=\frac{z_1}{z_2}.\ \blacktriangledown$$

Пример 4. Докажите, что для любого комплексного числа $z=(a;b)$ выполняется равенство

$$z=a+bi. \tag{5.5}$$

Обратно, если a и b — действительные числа и $z=a+bi$, то $z=(a;b)$.

□ Если $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$, то по формуле (5.1) $bi=b\cdot(0;1)=(b\cdot 0;b\cdot 1)=$ $=(0;b)$. Поэтому

$$a+bi=(a;0)+(0;b)=(a+0;0+b)=(a;b).\ \blacksquare$$

Запись комплексного числа $z=(a;b)$ в виде (5.5) называется *алгебраической формой записи* числа z. Числа $a\in\mathbf{R}$ и $b\in\mathbf{R}$ в алгебраической записи (5.5) комплексного числа z носят специальные названия. Число a называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $a=\operatorname{Re}z$, а число b — *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается $b=\operatorname{Im}z$. Легко проверить, что

$$\operatorname{Re}(z_1\pm z_2)=\operatorname{Re}z_1\pm\operatorname{Re}z_2;\ \operatorname{Im}(z_1\pm z_2)=\operatorname{Im}z_1\pm\operatorname{Im}z_2.$$

Если $\operatorname{Im}z=0$, то, как мы условились выше, число $z=a+0\cdot i=(a;0)$ есть действительное число a. Те комплексные числа $z=(0;b)=0+bi=bi$, действительная часть которых равна нулю, называются *чисто мнимыми*. Число $0=0+0i$ является одновременно и действительным и чисто мнимым.

В дальнейшем запись (5.5) будет пониматься только как алгебраическая запись комплексного числа $z=(a;b)$, то есть числа a и b в записи

вида (5.5) будут считаться только действительными числами, хотя оговариваться это особо не будет.

Ясно, что если $z = (a;b) = a + bi$, то $\bar{z} = a - bi$.

Пример 5. Докажите, что

$$i^2 = -1. \tag{5.6}$$

▲ Имеем

$i^2 = i \cdot i = (0;1)\cdot(0;1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1; 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1;0) = -1.$ ▼

В §5 гл. 2 мы условились использовать запись $c = (a;b)$ для обозначения того факта, что вектор c, параллельный некоторой плоскости $\mathcal{P}$, имеет в некотором базисе $\{e_1, e_2\}$ в плоскости $\mathcal{P}$ координаты a и b:

$$c = ae_1 + be_2.$$

Совпадение обозначений $c = (a;b)$ (для векторов плоскости $\mathcal{P}$) и $z = (a;b)$ (для комплексных чисел) не случайно. Подробно соответствие между векторами и комплексными числами будет изучаться в §§4, 5 настоящей главы.

§2. Свойства действий над комплексными числами

Законы сложения и вычитания

I_1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативность сложения).

II_1. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ассоциативность сложения).

III_1. $z + 0 = z$.

IV_1. $z + (-z) = 0$.

V_1. $z = z_1 - z_2 \Leftrightarrow z + z_2 = z_1 \Leftrightarrow z = z_1 + (-z_2)$.

Законы умножения и деления

I_2. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (коммутативность умножения).

II_2. $(z_1 z_2)\cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 z_3)$ (ассоциативность умножения).

III_2. $1\cdot z = z$, $(-1)\cdot z = -z$, $0\cdot z = 0$, $\dfrac{z}{1} = z$, $\dfrac{z}{-1} = -z$.

IV_2. $z \neq 0 \Rightarrow z\cdot\left(\dfrac{1}{z}\right) = 1$.

V_2. $z_2 \neq 0 \Rightarrow \left(z = \dfrac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow z\cdot z_2 = z_1 \Leftrightarrow z = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}\right)$.

Соотношения I_1 — V_1, I_2 — V_2 легко доказываются, исходя из определений. Равенство $\mathrm{II}_1(\mathrm{II}_2)$ позволяет опускать скобки в обозначении суммы