□ По определению модуля комплексного числа

$$|z_1 \pm z_2|^2 = (a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 \pm 2a_1a_2 + b_1^2 + b_2^2 \pm 2b_1b_2 =$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2(a_1a_2 + b_1b_2) \le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\gamma,$$

где $\gamma = |a_1a_2 + b_1b_2|$ — абсолютная величина действительного числа $a_1a_2 + b_1b_2$.

В соответствии с тождеством (2.11)

$$\gamma = \sqrt{(a_1a_2 + b_1b_2)^2} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2} \le$$
$$\le \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Таким образом, $|z_1 \pm z_2|^2 \le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$.

Отсюда $|z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Далее, $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2;\ a_1b_2 + b_1a_2)$. Поэтому

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 =$$
$$= a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2 =$$
$$= a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(b_2^2 + a_2^2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2.$$

Отсюда следует, что

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \tag{5.11}$$

По правилу V2 имеем $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) \cdot z_2 = z_1$. Следовательно (см. (5.11)), $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| \cdot |z_2| =$ $= |z_1|$, откуда $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$. ■

§3. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел

Пусть $z = (a;b)$ — комплексное число, не равное нулю. Обозначим $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ его модуль. Тогда $r > 0$,

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1. \tag{5.12}$$

Это равенство означает, что существует действительное число φ, удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \\ \dfrac{b}{r} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi. \end{cases} \tag{5.13}$$

Такое число φ называется *аргументом* комплексного числа z.

Множество всех решений φ системы уравнений (5.13), то есть множество всех аргументов комплексного числа z, обозначается $\operatorname{Arg} z$. Очевидно, что существует решение φ_0 системы (5.13), удовлетворяющее неравенствам $0 \le \varphi_0 < 2\pi$. Это решение выражается формулой

$$\varphi_0 = \begin{cases} 2\pi - \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, & \text{если } b < 0, \\ \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, & \text{если } b \ge 0. \end{cases} \tag{5.14}$$

Величина φ_0 называется *главным значением аргумента* комплексного числа z и обозначается $\arg z$. Имеет место формула

$$\operatorname{Arg} z = \{\varphi\colon\ \varphi = \arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}\} \tag{5.15}$$

(здесь и далее $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел).

□ Если $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, где $\varphi_0 = \arg z$, $k \in \mathbf{Z}$, то

$$r\cos\varphi = r\cdot\cos(\varphi_0 + 2\pi k) = r\cos\varphi_0 = a,$$
$$r\sin\varphi = r\cdot\sin(\varphi_0 + 2\pi k) = r\sin\varphi_0 = b,$$

то есть $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Обратно, если $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, то в соответствии с (5.13) $\cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \cos\varphi_0$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \sin\varphi_0$. Отсюда

$$0 = (\cos\varphi - \cos\varphi_0)^2 + (\sin\varphi - \sin\varphi_0)^2 = 2\cdot(1 - \cos(\varphi - \varphi_0)).$$

Следовательно, $\cos(\varphi - \varphi_0) = 1$, $\varphi - \varphi_0 = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ■

Из равенств (5.13) следует, что $z = a + bi = r\cos\varphi + r\sin\varphi\cdot i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Запись комплексного числа $z \ne 0$ в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r \in \mathbf{R}, \quad r > 0, \ \varphi \in \mathbf{R} \tag{5.16}$$

называется *тригонометрической формой записи* комплексного числа z. Аргумент комплексного числа $z = 0$ и его тригонометрическая форма записи не определяются.

Пример 1. Докажите, что из (5.16) следует, что $r = |z|$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$.

▲ Поскольку r, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ — действительные числа, в соответствии с результатом примера 4 §1 данной главы из (5.16) следует, что $z = r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot i = (r\cos\varphi; r\sin\varphi)$. Значит, $|z| = \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} = r$. Обозначим $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Тогда по доказанному $z = (a;b)$, $\frac{a}{r} = \cos\varphi$, $\frac{b}{r} = \sin\varphi$. Следовательно, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. ▼

Из результатов примера, в частности, следует, что если $t > 0$ — действительное число, то $|tz| = t|z|$, $\arg(tz) = \arg z$.

Если $t < 0$, $t \in \mathbf{R}$, то из равенств

$$tz = (-1)|t| \cdot z = -|t| r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |t| r(\cos(\varphi \pm \pi) + i\sin(\varphi \pm \pi))$$

вытекает, что $|tz| = |t| \cdot |z|$, $\arg(tz) = \arg z + \pi$, если $0 \le \arg z < \pi$, и $\arg(tz) = \arg z - \pi$, если $\pi \le \arg z < 2\pi$.

В курсе математического анализа для любого комплексного числа z определяется комплексное число e^z:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} s_n, \tag{5.17}$$

где $s_n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!}$, а предел в (5.17) понимается в обычном смысле: для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $|e^z - s_n| < \varepsilon$.

Доказывается, что для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 выполняются равенства

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad e^{z_1 - z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}. \tag{5.18}$$

Доказывается также, что для любого действительного числа φ имеет место формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{5.19}$$

Вытекающая из формул (5.16), (5.19) запись комплексного числа $z \neq 0$ в виде

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, \ r \in \mathbf{R}, \ r > 0, \ \varphi \in \mathbf{R} \tag{5.20}$$

называется *показательной формой записи* комплексного числа z. Показательная форма записи числа $z = 0$ не определяется.

Отметим, что к определению числа e^z, $z \in \mathbf{C}$ можно прийти и другим путем. Именно, можно считать равенство (5.19) определением величины $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbf{R}$, а для комплексного числа $z = (a;b)$ число e^z задать формулой

$$e^z = a^{a+bi} = \exp(a) \cdot e^{ib} = \exp(a)(\cos b + i \sin b). \tag{5.21}$$

Формулы (5.18) и (5.17) тогда окажутся следствием определения (5.21). Именно такому подходу мы и будем следовать.

Пример 2. Пользуясь формулой (5.19) как определением, докажите, что для любых действительных чисел φ_1 и φ_2 выполнены равенства

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}; \quad e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}. \tag{5.22}$$

▲ Действительно,

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 =$$

$$= \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2) =$$

$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

По определению частного

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} =$$

$$= \left(\frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}; \ \frac{-\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} \right) =$$

$$= (\cos(\varphi_1 - \varphi_2); \ \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \ ▼$$

Пример 3. Выведите из определения (5.21) равенства (5.18).

▲ Пусть $z_1 = (a_1;b_1)$, $z_2 = (a_2;b_2)$. Тогда $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2; b_1 \pm b_2)$ и по определению (5.21)

$$e^{z_1} = \exp(a_1) \cdot e^{ib_1}, \ e^{z_2} = \exp(a_2) \cdot e^{ib_2}, \ e^{z_1 \pm z_2} = \exp(a_1 \pm a_2) \cdot e^{i(b_1 \pm b_2)}.$$

Учитывая формулы (5.22) и тот факт, что для действительных чисел a_1 и a_2 справедливы равенства

$$\exp(a_1+a_2)=\exp(a_1)\cdot\exp(a_2),\ \ \exp(a_1-a_2)=\frac{\exp(a_1)}{\exp(a_2)},$$

получим

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=\exp(a_1)\cdot e^{ib_1}\cdot\exp(a_2)\cdot e^{ib_2}=\exp(a_1)\cdot\exp(a_2)\cdot e^{ib_1}\cdot e^{ib_2}=$$
$$=\exp(a_1+a_2)\cdot e^{i(b_1+b_2)}=e^{z_1+z_2};$$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=\frac{\exp(a_1)\cdot e^{ib_1}}{\exp(a_2)\cdot e^{ib_2}}=\frac{\exp(a_1)}{\exp(a_2)}\cdot\frac{e^{ib_1}}{e^{ib_2}}=\exp(a_1-a_2)\cdot e^{i(b_1-b_2)}=e^{z_1-z_2}.\ \blacktriangledown$$

Пример 4. Найдите $|z|$, $\arg z$ и запишите число z в показательной форме, если: а) $z=a>0$, $a\in\mathbf{R}$; б) $z=a<0$, $a\in\mathbf{R}$; в) $z=i$; г) $z=1+i$; д) $z=\sin\alpha-i\cos\alpha$, $0\le\alpha<2\pi$, $a\in\mathbf{R}$; е) $z=1-e^{i\psi}$, $0<\psi<2\pi$, $\psi\in\mathbf{R}$.

$\blacktriangle$ а) Если $z=a=(a;0)$, $a>0$, то $|z|=\sqrt{a^2+0^2}=|a|=a$. По формуле (5.14) $\arg z=\arccos\frac{a}{|z|}=\arccos 1=0$. Таким образом, $(a;0)=$ $=a=a\cdot e^{i0}$, $a>0$. В частности, $1=e^{i0}$.

б) Если $z=a=(a;0)$, $a<0$, то $|z|=|a|=-a$. По формуле (5.14) $\arg z=\arccos\frac{a}{|z|}=\arccos(-1)=\pi$. Следовательно, $(a;0)=a=(-a)e^{i\pi}$, $a<0$. В частности, $-1=e^{i\pi}$.

в) Если $z=i=(0;1)$, то $|z|=\sqrt{0^2+1^2}=1$. По формуле (5.14) $\arg z=$ $=\arccos\frac{0}{|z|}=\frac{\pi}{2}$. Значит, $i=1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$.

г) Пусть $z=1+i=(1;1)$. Тогда $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $\arg z=$ $=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$, $1+i=\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$.

д) Для числа $z=\sin\alpha-i\cos\alpha$, $0\le\alpha<2\pi$ имеем $|z|=$ $=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=1$. Записав число z в виде

$$z = 1\cdot\left(\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

в соответствии с результатом примера 1 этого же параграфа получим $\alpha - \frac{\pi}{2} \in \operatorname{Arg} z$. Поэтому если $\frac{\pi}{2} \le \alpha < 2\pi$, то $0 \le \alpha - \frac{\pi}{2} < 2\pi$ и $\arg z = \alpha - \frac{\pi}{2}$. Если же $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\alpha - \frac{\pi}{2} + 2\pi \in \operatorname{Arg} z$, $0 \le \alpha + \frac{3\pi}{2} < 2\pi$ и, следовательно, $\arg z = \alpha + \frac{3\pi}{2}$; $z = 1\cdot e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})}$.

е) Запишем число $z = 1 - e^{i\psi}$ в виде

$$z = 1 - (\cos\psi + i\sin\psi) = (1 - \cos\psi) - i\sin\psi =$$

$$= 2\sin^2\frac{\psi}{2} - i\cdot 2\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2} = 2\sin\frac{\psi}{2}\left(\sin\frac{\psi}{2} - i\cos\frac{\psi}{2}\right).$$

Так как $2\sin\frac{\psi}{2} > 0$ $\left(0 < \frac{\psi}{2} < \pi\right)$, то в силу результата примера 1 этого параграфа и пункта д) данного примера $|z| = 2\sin\frac{\psi}{2}$, $\arg z = \frac{\psi - \pi}{2}$, если $\pi \le \psi < 2\pi$, и $\arg z = \frac{\psi + 3\pi}{2}$, если $0 < \psi < \pi$. Показательная форма числа z имеет вид

$$z = 2\sin\frac{\psi}{2}e^{\frac{i\psi - \pi}{2}}. \blacktriangledown$$

Пример 5. Докажите, что для любых комплексных чисел $z_1 \ne 0$, $z_2 \ne 0$ выполнены равенства (ср. (5.10))

$$|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \\ &\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 \end{aligned} \tag{5.24}$$

(напомним, что суммой множеств $\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$ называется множество

$$\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \{\varphi\colon \varphi = \varphi_1 + \varphi_2,\ \varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1,\ \varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2\},$$

а разностью $\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$ — множество

$$\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = \{\psi\colon \psi = \psi_1 - \psi_2,\ \psi_1 \in \operatorname{Arg} z_1,\ \psi_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}).$$

□ Пусть $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$ $(r_1 > 0,\ r_2 > 0)$, $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$, $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$. Запишем числа z_1 и z_2 в показательной форме: $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$. Тогда $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ (см. (5.22)). Так как $r_1 r_2 \in \mathbf{R}$, $r_1 r_2 > 0$, $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathbf{R}$, то в силу результата примера 1 этого же параграфа $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$,

$$\varphi_1 + \varphi_2 \in \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2). \tag{5.25}$$

В силу произвольности элементов множеств $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$ и $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$ отсюда следует включение

$$\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \subset \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2). \tag{5.26}$$

Аналогично $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$, и поэтому $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\varphi_1 - \varphi_2 \in \operatorname{Arg}\dfrac{z_1}{z_2}$, следовательно,

$$\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 \subset \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}. \tag{5.27}$$

Обозначим теперь через φ произвольный аргумент числа $z_1 \cdot z_2$. Пусть, по-прежнему, $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$, $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$. В соответствии с формулой (5.15) и включением (5.25) существуют целые числа k_1 и k_2 такие, что

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k_1,\ \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_0 + 2\pi k_2,\ \varphi_0 = \arg(z_1 \cdot z_2).$$

Отсюда следует, что $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2^*$, где $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$, а

$$\varphi_2^* = \varphi_2 + 2\pi(k_1 - k_2) \in \operatorname{Arg} z_2,$$

то есть $\varphi \in \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$. В силу произвольности элемента $\varphi \in \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2)$ заключаем, что

$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) \subset \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

Учитывая, что выполнено также включение (5.26), приходим к равенству (5.23). Включение $\operatorname{Arg}\dfrac{z_1}{z_2} \subset \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$ и равенство (5.24) получаются аналогично. ■

Для комплексного числа $z \neq 0$ через $|\operatorname{Arg} z|$ условимся обозначать величину

$$|\operatorname{Arg} z| = \min_{\varphi \in \operatorname{Arg} z} |\varphi|. \tag{5.28}$$

Пример 6. Докажите, что если $z \neq 0$, $\varphi_0 = \arg z$, то

$$|\operatorname{Arg} z| = \min\{\varphi_0, 2\pi - \varphi_0\}, \tag{5.29}$$

$$\arg\frac{1}{z} = \begin{cases} \arg z = 0, & z \in \mathbf{R},\ z > 0, \\ 2\pi - \arg z, & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{5.30}$$

$$\left|\operatorname{Arg}\frac{1}{z}\right| = |\operatorname{Arg} z|.$$

□ Если $k \in \mathbf{Z}$, $k > 0$, то $|\varphi_0| = \varphi_0 < \varphi_0 + 2\pi k = |\varphi_0 + 2\pi k|$. Если $k \in \mathbf{Z}$, $k < -1$, то $|\varphi_0 - 2\pi| = 2\pi - \varphi_0 < 2\pi \cdot (-k) - \varphi_0 = |\varphi_0 + 2\pi k|$. Отсюда следует, что наименьшую абсолютную величину среди аргументов комплексного числа z могут иметь только величины φ_0 и $\varphi_0 - 2\pi$, что и приводит к формуле (5.29).

Далее, $\arg 1 = 0$ (пример 4а)), следовательно, по формуле (5.23) из равенства $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ получаем

$$\arg z + \arg\frac{1}{z} \in \operatorname{Arg} 1 = \{\varphi\colon \varphi = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Это означает, что $\arg z + \arg\frac{1}{z} = 2\pi k_0$ при некотором $k_0 \in \mathbf{Z}$. Если z не является положительным действительным числом, то $\arg z \neq 0$ и из неравенств $0 < \arg z < 2\pi$, $0 \leq \arg\frac{1}{z} < 4\pi$ имеем $0 < 2\pi k_0 < 4\pi$. Отсюда $k_0 = 1$, то есть $\arg\frac{1}{z} = 2\pi k_0 - \arg z = 2\pi - \arg z$. Если же $z \in \mathbf{R}$, $z > 0$, то в силу примера 4а) $\arg z = \arg\frac{1}{z} = 0$. В этом случае $\left|\operatorname{Arg}\frac{1}{z}\right| = |\operatorname{Arg} z| = 0$.

Если z не является положительным действительным числом, то по формуле (5.30)

$$\left|\operatorname{Arg}\frac{1}{z}\right| = \min\{\arg\frac{1}{z}, 2\pi - \arg\frac{1}{z}\} = \min\{2\pi - \arg z, \arg z\} = |\operatorname{Arg} z|. \blacksquare$$

Отметим, что из формулы (5.29) следует, что

$$|\operatorname{Arg} z| = \begin{cases} \arg z, & \text{если } 0 \le \arg z \le \pi, \\ 2\pi - \arg z, & \text{если } \pi < \arg z < 2\pi. \end{cases} \tag{5.31}$$

Во всех случаях $0 \le |\operatorname{Arg} z| \le \pi$.

Пример 7. Докажите, что если $z = it$, $t \in \mathbf{R}$, $t \ne 0$, то

$$|\operatorname{Arg}(it)| = \frac{\pi}{2}. \tag{5.32}$$

▲ Поскольку $it = t\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = |t| \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$, если $t > 0$, и $it =$ $= -t\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = |t| \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$, если $t < 0$, то по формуле (5.31)

$$|\operatorname{Arg}(it)| = \arg(it) = \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$$

$$|\operatorname{Arg}(it)| = 2\pi - \arg(it) = 2\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad t < 0. \blacktriangledown$$

§4. Геометрические интерпретации комплексных чисел. Интерпретация I

Пусть $\mathcal{P}$ — ориентированная плоскость. Зафиксируем прямоугольную систему координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, взяв в качестве начала координат O произвольную фиксированную точку плоскости $\mathcal{P}$, а в качестве базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ произвольный правый ортонормированный базис в плоскости $\mathcal{P}$: $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{OB}$ (рис. 5.1). Поставим комплексному числу $z =$ $= (a; b) \in \mathbf{C}$ в соответствие точку $M = M(z)$ плоскости $\mathcal{P}$ с координатами $(a; b)$ в фиксированной выше системе координат (на рис. 5.1 обе координаты точки M отрицательны: $a < 0$, $b < 0$). Будем говорить, что точка M *изображает* комплексное число $z = a + bi = (a; b)$ или, что число *изображается* точкой M. При таком соответствии, являющимся, как легко убедиться, взаимно однозначным соответствием между множеством то-