$$\left|\operatorname{Arg}\frac{1}{z}\right| = \min\{\arg\frac{1}{z}, 2\pi - \arg\frac{1}{z}\} = \min\{2\pi - \arg z, \arg z\} = |\operatorname{Arg} z|. \blacksquare$$

Отметим, что из формулы (5.29) следует, что

$$|\operatorname{Arg} z| = \begin{cases} \arg z, & \text{если } 0 \le \arg z \le \pi, \\ 2\pi - \arg z, & \text{если } \pi < \arg z < 2\pi. \end{cases} \tag{5.31}$$

Во всех случаях $0 \le |\operatorname{Arg} z| \le \pi$.

Пример 7. Докажите, что если $z = it$, $t \in \mathbf{R}$, $t \ne 0$, то

$$|\operatorname{Arg}(it)| = \frac{\pi}{2}. \tag{5.32}$$

▲ Поскольку $it = t\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = |t| \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$, если $t > 0$, и $it =$ $= -t\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = |t| \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$, если $t < 0$, то по формуле (5.31)

$$|\operatorname{Arg}(it)| = \arg(it) = \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$$

$$|\operatorname{Arg}(it)| = 2\pi - \arg(it) = 2\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad t < 0. \blacktriangledown$$

§4. Геометрические интерпретации комплексных чисел. Интерпретация I

Пусть $\mathcal{P}$ — ориентированная плоскость. Зафиксируем прямоугольную систему координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, взяв в качестве начала координат O произвольную фиксированную точку плоскости $\mathcal{P}$, а в качестве базиса $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ произвольный правый ортонормированный базис в плоскости $\mathcal{P}$: $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{OB}$ (рис. 5.1). Поставим комплексному числу $z =$ $= (a; b) \in \mathbf{C}$ в соответствие точку $M = M(z)$ плоскости $\mathcal{P}$ с координатами $(a; b)$ в фиксированной выше системе координат (на рис. 5.1 обе координаты точки M отрицательны: $a < 0$, $b < 0$). Будем говорить, что точка M *изображает* комплексное число $z = a + bi = (a; b)$ или, что число *изображается* точкой M. При таком соответствии, являющимся, как легко убедиться, взаимно однозначным соответствием между множеством то-

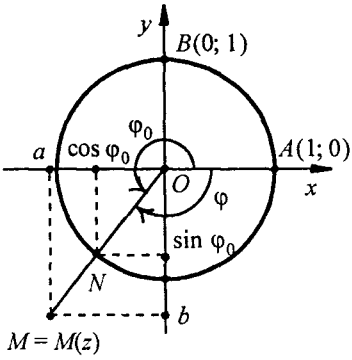

Рис. 5.1

чек плоскости $\mathcal{P}$ и множеством $\mathbf{C}$ комплексных чисел, действительные числа $(a;0)$ изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые числа $(0;b)$ — точками оси ординат. Оси абсцисс и ординат называют соответственно *действительной* и *мнимой* осями, а ориентированную плоскость, точки которой изображают комплексные числа, — *комплексной плоскостью*, обозначая ее, как и множество комплексных чисел, символом $\mathbf{C}$. Очевидно, что $M(0)=(0;0)=0$.

Если $z=a+bi$, то изображающая это комплексное число точка $M(z)$ имеет координаты $(a;b)$. По формуле расстояния между точками, заданными своими координатами в прямоугольной системе координат,

$$|OM(z)|=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=|z|. \qquad (5.33)$$

Если комплексное число $z=a+bi$ не равно нулю, то $\arg z$ — наименьший неотрицательный угол φ_0, на который следует повернуть (против часовой стрелки) луч $[OA)$ до совмещения с лучом $[OM(z))$.

□ Докажем это. Пусть $z=|z|$, $M=M(z)$, N — точка, лежащая на луче $[OM)$ такая, что $|ON|=1$. Тогда $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{r}\overrightarrow{OM}$, и точка N имеет координаты $N\left(\frac{a}{r};\frac{b}{r}\right)$. Точка N лежит на единичной окружности с центром в начале координат. Поэтому существует угол $\varphi_0\in[0,2\pi)$, при повороте на который вокруг начала координат точка A переходит в точку N (луч $[OA)$ совмещается с лучом $[OM)$). По определению синуса и косинуса $\cos\varphi_0$ и $\sin\varphi_0$ — это соответственно абсцисса и ордината точки N. В силу единственности координат имеем $\frac{a}{r}=\cos\varphi_0$, $\frac{b}{r}=\sin\varphi_0$. Отсюда следует (см. (5.13)), что $\varphi_0\in\operatorname{Arg}z$. Так как $0\le\varphi_0<2\pi$, то $\varphi_0=\arg z$. ■

Поскольку при повороте вокруг своего начала на угол, кратный 2π, всякий луч совмещается с самим собой, а при повороте на угол, не кратный 2π, не совмещается с самим собой, то в соответствии с формулой (5.15) $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ тогда и только тогда, когда при повороте на угол φ вокруг точки O луч $[OA)$ совмещается с лучом $[OM(z))$. На рис. 5.1 изображен также и отрицательный угол $\varphi = \varphi_0 - 2\pi \in \operatorname{Arg} z$, при повороте на который вокруг точки O луч $[OA)$ совмещается с лучом $[OM)$.

Пример 1. Докажите, что если z_1 и z_2 — комплексные числа такие, что $|z_1| = |z_2| \neq 0$, то

$$M(z_2) = R_O^{\varphi} M(M(z_1)), \tag{5.34}$$

где φ — произвольный аргумент числа $\dfrac{z_2}{z_1}$, R_O^{φ} — преобразование поворота плоскости $\mathcal{P}$ вокруг точки O на угол φ.

□ Пусть $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$, $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$, $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Тогда в соответствии со сказанным выше луч $l_+ = [OM(z_1))$ получается поворотом луча $[OA)$ вокруг точки O на угол φ_1. Если теперь повернуть луч l_+ еще на угол φ вокруг начала координат (рис. 5.2), то получившийся луч будет образом луча $[OA)$ при повороте на угол $\varphi_1 + \varphi_2$, то есть на угол φ_2. Но при повороте вокруг точки O на угол φ_2 луч $[OA)$ совмещается с лучом $L_+ = [OM(z_2))$. Это значит, что при повороте на угол φ вокруг начала координат луч l_+ переходит в луч L_+. В частности, точка $M(z_1) \in l_+$ переходит в точку $N = R_O^{\varphi}(M(z_1)) \in L_+$. При этом

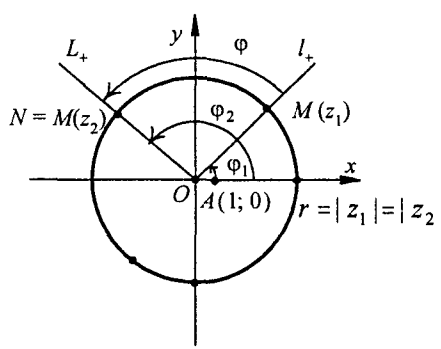

Рис. 5.2

$$|ON| = |OR_O^{\varphi}(M(z_1))| = |OM(z_1)| = |z_1| = |z_2| = |OM(z_2)|.$$

Таким образом, точки N и $M(z_2)$ лежат на одном луче L_+ и одинаково удалены от его начала. Следовательно, $N = M(z_2)$. Чтобы завершить доказательство формулы (5.34), осталось заметить, что в силу произвольности аргументов $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$ и $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$ число $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ — произвольный аргумент комплексного числа $\dfrac{z_2}{z_1}$ (формула (5.24)). ■

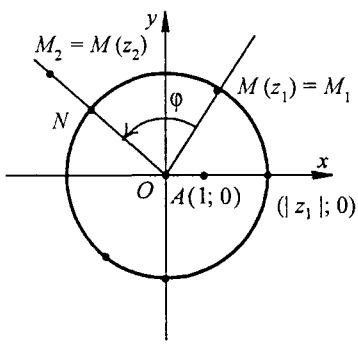

Рис. 5.3

Пример 2. Докажите, что если $z_1 \neq 0$ и $z_2 \neq 0$ — комплексные числа, $M(z_1) = M_1$, $M(z_2) = M_2$, то

$$M_2 = H_O^r \circ R_O^\varphi(M_1), \quad (5.35)$$

где $r = \dfrac{|z_2|}{|z_1|}$, φ — произвольный аргумент числа $\dfrac{z_2}{z_1}$. Обратно, если равенство (5.35) выполнено при некоторых $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, $\varphi \in \mathbf{R}$, то $z_2 = z_1 \cdot re^{i\varphi}$.

▲ При решении предыдущего примера показано, что точка $N = R_O^\varphi(M_1)$ лежит на луче $L_+ = [OM_2)$ (рис. 5.3). Точка M_2 также лежит на луче L_+ с началом в точке O. Так как

$$|ON| = |OM_1| = |z_1|, \ |OM_2| = |z_2| = r \cdot |z_1|,$$

то по определению гомотетии $M_2 = H_O^r(N)$.

Обратно, если выполнено равенство (5.35), то в соответствии с формулой (5.33) и определением гомотетии

$$|z_2| = |OM_2| = r \cdot |OR_O^\varphi(M_1)| = r \cdot |OM_1| = r \cdot |z_1|, \ r = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \left|\frac{z_2}{z_1}\right|.$$

Далее, из формулы (5.35) следует, что луч $[OM_2)$ получается из луча $[OM_1)$ поворотом на угол φ вокруг точки O. Сам же луч $[OM_1)$ может быть получен поворотом луча $[OA)$ на угол $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$ вокруг начала ко-

ординат. Следовательно, луч $[OM_2)$ является образом луча $[OA)$ при повороте плоскости $\mathcal{P}$ вокруг точки O на угол $\varphi+\varphi_1$. Это значит, что $\varphi+\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_2$, а

$$\varphi=(\varphi+\varphi_1)-\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_2-\operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg}(z_2/z_1).$$

По определению показательной формы записи комплексного числа

$$\frac{z_2}{z_1}=\left|\frac{z_2}{z_1}\right|\cdot e^{i\varphi}=r\cdot e^{i\varphi}. \blacktriangledown$$

Пример 3. Докажите, что если $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ — комплексные числа, $M_1=M(z_1)$, $M_2=M(z_2)$, то угол $M_1\hat{O}M_2$ между векторами $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ выражается формулой

$$M_1\hat{O}M_2=\left|\operatorname{Arg}\frac{z_2}{z_1}\right|. \qquad (5.36)$$

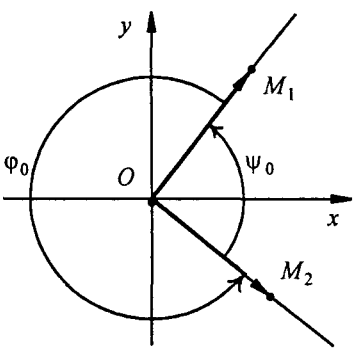

Рис. 5.4

□ Если векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ сонаправлены, то $M_1\hat{O}M_2=0$,

$$M_2=H_O^r\circ R_O^0(M_1),$$
$$r=|OM_2|/|OM_1|.$$

Как доказано в предыдущем примере, в этом случае $0\in\operatorname{Arg}\frac{z_2}{z_1}$ и по формуле (5.31) $\left|\operatorname{Arg}\frac{z_2}{z_1}\right|=0=M_1\hat{O}M_2$.

Рассмотрим случай, когда векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ (рис. 5.4) не сонаправлены ($0\notin\operatorname{Arg}\frac{z_2}{z_1}$). Обозначим $\varphi_0=\arg\frac{z_2}{z_1}$, $\psi_0=\arg\frac{z_1}{z_2}$. Так как $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{(z_2/z_1)}$, то по формуле (5.30) $\varphi_0+\psi_0=2\pi$. В соответствии с определением угла между векторами угол $M_1\hat{O}M_2$ — наименьший из углов φ_0 и ψ_0 (рис. 5.4):

$$M_1\hat{O}M_2 = \min\{\varphi_0, \psi_0\} = \min\{\varphi_0, 2\pi - \varphi_0\} = \left|\operatorname{Arg}\frac{z_2}{z_1}\right|. \blacksquare$$

Пример 4. Пусть $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ — комплексные числа, $M_1 = M(z_1)$, $M_2 = M(z_2)$, $r = |OM_2|/|OM_1|$, $M_1\hat{O}M_2 = \varphi$. Тогда

$$z_2 = r\, z_1 \cdot e^{i\varepsilon\varphi}, \tag{5.37}$$

где $\varepsilon = 1$, если $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$ и базис $\{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\}$ — правый, $\varepsilon = -1$, если $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$ и базис $\{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\}$ — левый, $\varepsilon = 1$, если $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$.

▲ Если базис $\{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\}$ — правый, то кратчайший поворот (то есть поворот на угол, абсолютная величина которого равна φ) от луча $[OM_1)$ к лучу $[OM_2)$ происходит против часовой стрелки. Поэтому $[OM_2) = R_O^{\varphi}([OM_1))$, $M_2 = H_O^r \circ R_O^{\varphi}(M_1)$ и в силу примера 2 этого параграфа имеет место равенство (5.37), причем в этом случае $\varepsilon = 1$. Если базис $\{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\}$ — левый, то кратчайший поворот от луча $[OM_1)$ к лучу $[OM_2)$ происходит по часовой стрелке. Поэтому $[OM_2) = R_O^{-\varphi}([OM_1))$, что приводит к равенству (5.37) с $\varepsilon = -1$. Случаи $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ читатель без труда рассмотрит самостоятельно. ▼

§5. Геометрические интерпретации комплексных чисел. Интерпретация II

Пусть $\mathcal{P}$ — введенная в §4 ориентированная плоскость с фиксированной на ней прямоугольной системой координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$.

Поставим в соответствие комплексному числу $z = (a;b) \in \mathbf{C}$ вектор $\vec{V}(z) = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 = (a;b)$. Это соответствие взаимно однозначно. Каким бы ни был вектор $\boldsymbol{c}$, лежащий в плоскости $\mathcal{P}$, существует одно и только одно комплексное число z, которому он соответствует.

□ Действительно, в силу утверждений §5 гл.2 существует единственная пара действительных чисел x и y таких, что $\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$. Это означает, что $\boldsymbol{c} = \vec{V}(z)$, где $z = (x;y) = x + yi \in \mathbf{C}$. ■