

$$\hat{M_1} \vec{OM}_2 = \min\{\phi_0, \psi_0\} = \min\{\phi_0, 2\pi - \phi_0\} = \left| \operatorname{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right|. \blacksquare$$

**Пример 4.** Пусть  $z_1 \neq 0$ ,  $z_2 \neq 0$  — комплексные числа,  $M_1 = M(z_1)$ ,  $M_2 = M(z_2)$ ,  $r = |\vec{OM}_2| / |\vec{OM}_1|$ ,  $\hat{M_1} \vec{OM}_2 = \phi$ . Тогда

$$z_2 = r z_1 \cdot e^{i\phi}, \quad (5.37)$$

где  $\varepsilon = 1$ , если  $\phi \neq 0$ ,  $\phi \neq \pi$  и базис  $\{\vec{OM}_1, \vec{OM}_2\}$  — правый,  $\varepsilon = -1$ , если  $\phi \neq 0$ ,  $\phi \neq \pi$  и базис  $\{\vec{OM}_1, \vec{OM}_2\}$  — левый,  $\varepsilon = 1$ , если  $\phi = 0$  или  $\phi = \pi$ .

▲ Если базис  $\{\vec{OM}_1, \vec{OM}_2\}$  — правый, то кратчайший поворот (то есть поворот на угол, абсолютная величина которого равна  $\phi$ ) от луча  $[\vec{OM}_1]$  к лучу  $[\vec{OM}_2]$  происходит против часовой стрелки. Поэтому  $[\vec{OM}_2] = R_O^\phi([\vec{OM}_1])$ ,  $M_2 = H_O' \circ R_O^\phi(M_1)$  и в силу примера 2 этого параграфа имеет место равенство (5.37), причем в этом случае  $\varepsilon = 1$ . Если базис  $\{\vec{OM}_1, \vec{OM}_2\}$  — левый, то кратчайший поворот от луча  $[\vec{OM}_1]$  к лучу  $[\vec{OM}_2]$  происходит по часовой стрелке. Поэтому  $[\vec{OM}_2] = R_O^{-\phi}([\vec{OM}_1])$ , что приводит к равенству (5.37) с  $\varepsilon = -1$ . Случай  $\phi = 0$  и  $\phi = \pi$  читатель без труда рассмотрит самостоятельно. ▼

## §5. Геометрические интерпретации комплексных чисел. Интерпретация II

Пусть  $\mathcal{P}$  — введенная в §4 ориентированная плоскость с фиксированной на ней прямоугольной системой координат  $\{O, e_1, e_2\}$ .

Поставим в соответствие комплексному числу  $z = (a; b) \in \mathbb{C}$  вектор  $\vec{V}(z) = ae_1 + be_2 = (a; b)$ . Это соответствие взаимно однозначно. Каким бы ни был вектор  $c$ , лежащий в плоскости  $\mathcal{P}$ , существует одно и только одно комплексное число  $z$ , которому он соответствует.

□ Действительно, в силу утверждений §5 гл.2 существует единственная пара действительных чисел  $x$  и  $y$  таких, что  $c = xe_1 + ye_2$ . Это означает, что  $c = \vec{V}(z)$ , где  $z = (x; y) = x + yi \in \mathbb{C}$ . ■

Комплексное число  $z$ , которому поставлен в соответствие вектор  $\mathbf{c}$ , будем обозначать  $K(\mathbf{c})$ . В соответствии с обозначениями

$$\vec{V}(a + bi) = a + bi, \quad \vec{V}(K(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2. \quad (5.38)$$

Важнейшим свойством определенного таким образом взаимно однозначного соответствия между множеством  $\mathbf{C}$  и множеством векторов, лежащих в плоскости  $\mathcal{P}$ , является его линейность: для любых действительных чисел  $\lambda$  и  $\mu$  и любых векторов  $\mathbf{c}_1$  и  $\mathbf{c}_2$ , лежащих в плоскости  $\mathcal{P}$ ,

$$K(\lambda\mathbf{c}_1 + \mu\mathbf{c}_2) = \lambda \cdot K(\mathbf{c}_1) + \mu \cdot K(\mathbf{c}_2); \quad (5.39)$$

для любых действительных чисел  $\lambda$  и  $\mu$  и любых комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$

$$\vec{V}(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda \vec{V}(z_1) + \mu \vec{V}(z_2). \quad (5.40)$$

□ Если  $\mathbf{c}_1 = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{c}_2 = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2$ , то

$$\lambda\mathbf{c}_1 + \mu\mathbf{c}_2 = (\lambda x_1 + \mu x_2)\mathbf{e}_1 + (\lambda y_1 + \mu y_2)\mathbf{e}_2.$$

Следовательно,

$$K(\mathbf{c}_1) = (x_1; y_1), \quad K(\mathbf{c}_2) = (x_2; y_2),$$

$$\begin{aligned} K(\lambda\mathbf{c}_1 + \mu\mathbf{c}_2) &= (\lambda x_1 + \mu x_2; \lambda y_1 + \mu y_2) = (\lambda x_1; \lambda y_1) + (\mu x_2; \mu y_2) = \\ &= \lambda \cdot (x_1; y_1) + \mu \cdot (x_2; y_2) = \lambda \cdot K(\mathbf{c}_1) + \mu \cdot K(\mathbf{c}_2) \end{aligned}$$

(в доказательстве использовалось первое из равенств (5.1)). Формула (5.39) доказана. Равенство (5.40) доказывается аналогично. ■

Если  $M(z)$ ,  $z \in \mathbf{C}$  — соответствие между комплексными числами и точками плоскости  $\mathcal{P}$ , определенное в §4, то

$$\vec{OM}(z) = \vec{V}(z). \quad (5.41)$$

Из формул (5.41), (5.33) следует, что

$$|z| = |\vec{V}(z)|. \quad (5.42)$$

□ Докажем (5.41). Если  $z = (a; b)$ , то точка  $M(z)$  имеет в системе координат  $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  координаты  $(a; b)$ . Следовательно,

$$\vec{OM}(z) = ae_1 + be_2 = \vec{V}(z). \blacksquare$$

**Пример 1.** Пусть  $\mathbf{c}_1 = \vec{V}(z_1)$ ,  $\mathbf{c}_2 = \vec{V}(z_2)$ ,  $z_1 \in \mathbf{C}$ ,  $z_2 \in \mathbf{C}$ ,  $z_1 \neq 0$ ,  $z_2 \neq 0$ . Найдите угол между векторами  $\mathbf{c}_1$  и  $\mathbf{c}_2$ , если а)  $z_1 = 1 - i$ ,  $z_2 = 1 + i$ ; б)  $z_1 = 3 - i$ ,  $z_2 = 2 + i$ .

▲ В соответствии с (5.41) угол  $\phi$  между векторами  $c_1$  и  $c_2$  равен углу между векторами  $\vec{OM}(z_1)$  и  $\vec{OM}(z_2)$ . По формуле (5.36) этот угол равен  $\left| \operatorname{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right|$ , то есть

$$(\overset{\wedge}{V(z_1)}, \overset{\wedge}{V(z_2)}) = \left| \operatorname{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right|. \quad (5.43)$$

В случае а)

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i = 1 \cdot e^{\frac{i\pi}{2}}, \quad \left| \operatorname{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{\pi}{2}.$$

В случае б)

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2+i}{3-i} = \frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{6+5i+i^2}{9-i^2} = \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}},$$

$$\left| \operatorname{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{\pi}{4}.$$

Здесь использованы результаты примера 4 §3 этой главы и формула (5.31). ▼

**Пример 2.** Найдите величину угла  $\hat{A}$  треугольника  $ABC$ , если  $A(1; 1)$ ,  $B(4; 0)$ ,  $C(3; 2)$  (здесь и далее координаты точек заданы в фиксированной в §4 системе координат  $\{O, e_1, e_2\}$ ).

$$\overset{\wedge}{AB} = (4-1; 0-1) = 3e_1 - e_2 = \overset{\wedge}{V(z_1)}, \quad z_1 = 3-i;$$

$$\overset{\wedge}{AC} = (3-1; 2-1) = \overset{\wedge}{V(z_2)}, \quad z_2 = 2+i.$$

По формуле (5.43)  $\hat{A} = \left| \operatorname{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{\pi}{4}$  (пример 1 б) этого параграфа). ▼

**Пример 3.** Пусть  $c_1 = \overset{\wedge}{V(z_1)}$ ,  $z_1 \in \mathbb{C}$ ,  $z_1 \neq 0$ . Найдите все комплексные числа  $z_2 = K(c_2)$  такие, что  $c_1 \perp c_2$ .

▲ Очевидно, что если  $z_2 = 0$ , то есть если  $c_2 = \overset{\wedge}{0}$ , то  $c_1 \perp c_2$ . Пусть теперь  $z_2 \neq 0$  — искомое комплексное число,  $M_1 = M(z_1)$ ,  $M_2 =$

$= M(z_2)$ . Тогда  $c_1 = \vec{OM}_1$ ,  $c_2 = \vec{OM}_2$ , и из условия ортогональности векторов  $c_1$  и  $c_2$  следует, что  $\hat{\vec{M}_1\vec{M}_2} = \frac{\pi}{2}$ . По формуле (5.37)

$$z_2 = r z_1 \cdot e^{\pm i \frac{\pi}{2}} = r z_1 \left( \cos \left( \pm \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \pm \frac{\pi}{2} \right) \right) = \pm r i z_1.$$

Таким образом, искомое комплексное число  $z$  в любом случае имеет вид

$$z_2 = itz_1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.44)$$

Обратно, если  $z_2 = itz_1$ , то при  $t = 0$ :  $z_2 = 0$ ,  $c_2 = \vec{0}$  и  $c_2 \perp c_1$ . Если же  $t \neq 0$ , то по формуле (5.32)

$$\hat{(c_1, c_2)} = \left| \operatorname{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right| = |\operatorname{Arg}(it)| = \frac{\pi}{2}. \quad \blacktriangledown$$

**Пример 4.** Найдите длину  $h$  высоты  $CH$  треугольника  $ABC$ , рассмотренного в примере 2 этого параграфа.

Обозначим  $c_1 = \vec{AB} = (3; -1)$ ,  $c_2 = \vec{HC}$ ,  $c_3 = \vec{CA} = (-2; -1)$ ,  $z_1 = K(c_1) = 3 - i$ ,  $z_2 = K(c_2)$ ,  $z_3 = K(c_3) = -2 - i$  (рис. 5.5). Так как  $c_2 \perp c_1$ , то по формуле (5.44) существует действительное число  $t$  такое, что  $z_2 = itz_1$ . Далее,

векторы  $\vec{AH}$  и  $\vec{AB}$  коллинеарны. Поэтому существует действительное число  $\tau$  такое, что

$$\vec{AH} = \tau \vec{AB} = \tau c_1.$$

Так как  $\vec{0} = \vec{CA} + \vec{AH} + \vec{HC}$ , то по формуле (5.39)

$$0 = K(\vec{0}) = K(c_3 + \tau c_1 + c_2) = K(c_3) + \tau K(c_1) + K(c_2) = z_3 + \tau z_1 + itz_1;$$

$$(\tau + it) \cdot z_1 = -z_3, \quad \tau + it = \frac{-z_3}{z_1} = \frac{2+i}{3-i}.$$

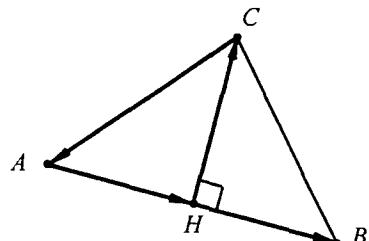


Рис. 5.5

Отсюда (см. пример 1 б) данного параграфа)  $\tau + it = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ .

Числа  $\tau$  и  $t$  — действительные. Следовательно, по определению равенства комплексных чисел  $\tau = \frac{1}{2}$ ,  $t = \frac{1}{2}$ . Учитывая (5.42), получаем

$$h = |\vec{CH}| = |c_2| = |z_2| = |itz_1| = |i| \cdot |t| \cdot |z_1| = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}. \blacktriangleright$$

**Пример 5.** Найдите координаты вершины  $C$  прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\hat{B} = \frac{\pi}{2}$ ), если  $A(2; -11)$ ,  $B(-10; -2)$ ,  $\hat{A} = \arctg \frac{4}{3}$ .

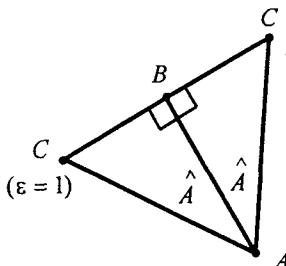


Рис. 5.6

▲ В соответствии с условиями задачи  $\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{4}{3}$ . Пусть теперь

$$c_1 = \vec{AB} = (-12; 9),$$

$$z_1 = K(c_1) = -12 + 9i, \quad c_2 = \vec{AC},$$

$$z_2 = K(c_2),$$

$$r = \frac{|c_2|}{|c_1|} = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{1}{\cos \hat{A}} = \frac{5}{3}. \text{ Так как}$$

угол  $\varphi$  между векторами  $c_1$  и  $c_2$  равен  $\hat{A}$ , то по формулам (5.41), (5.37)

$$z_2 = r \cdot z_1 \cdot e^{i\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot z_1 \cdot (\cos(\varepsilon\varphi) + i \sin(\varepsilon\varphi)) = z_1 \cdot (1 + \varepsilon i \operatorname{tg} \varphi), \quad (5.45)$$

$$z_2 = (-12 + 9i) \left( 1 + \varepsilon i \frac{4}{3} \right) = -12 + 9i - 16\varepsilon i + 12\varepsilon^2 = (-12 - 12\varepsilon; 9 - 16\varepsilon),$$

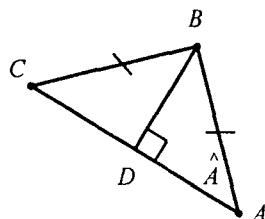
$$\vec{AC} = c_2 = (-12 - 12\varepsilon; 9 - 16\varepsilon), \quad C(-10 - 12\varepsilon; -2 - 16\varepsilon), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Таким образом, задача имеет два решения (рис. 5.6):  $C(2; 14)$  (при  $\varepsilon = -1$ ) и  $C(-22; -18)$  (при  $\varepsilon = 1$ ). ▼

**Пример 6.** Найдите координаты вершины  $B$  равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $|AB| = |BC|$ ), если

$$A(7; -6), \quad C(-17; 12), \quad \operatorname{tg} \hat{A} = \frac{4}{3}.$$

► Обозначим через  $D$  середину отрезка  $[AC]$  (рис. 5.7). Тогда  $\hat{ADB} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\vec{AD} = \frac{1}{2} \vec{AC} = (-12; 9)$ . Обозначая  $c_1 = \vec{AD}$ ,  $c_2 = \vec{AB}$ ,  $z_1 = K(c_1) = -12 + 9i$ ,  $z_2 = K(c_2)$  (ср. пример 5 этого параграфа), находим, как и там,  $z_2 = (-12 - 12\epsilon; 9 - 16\epsilon)$ ,  $B(-5 - 12\epsilon; 3 - 16\epsilon)$ ,  $\epsilon = \pm 1$ .



**Пример 7.** На сторонах произвольного треугольника  $ABC$  вне его построены равносторонние треугольники  $BCA_1$ ,  $ACB_1$ ,  $ABC_1$ ;  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  — центры этих треугольников (рис. 5.8). Докажите, что треугольник  $A_2B_2C_2$  — правильный.

► Обозначим

$$\begin{aligned} c_1 &= \vec{AC}, \quad c_2 = \vec{CB}, \quad c_3 = \vec{BA}, \\ c_4 &= \vec{CA}_2, \quad c_5 = \vec{AB}_2, \quad c_6 = \vec{BC}_2, \\ z_j &= K(c_j), \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{aligned}$$

Если  $D$  — середина отрезка  $[BC]$ , то

$$\hat{CD}A_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \hat{DC}A_2 = \frac{\pi}{6}, \quad \vec{CD} = \frac{1}{2} \vec{c}_2,$$

$|c_4| = \frac{|\vec{CD}|}{\cos \pi/6}$  и (ср. пример 5, формула (5.45))

$$z_4 = \frac{1}{2} z_2 \cdot \frac{1}{\cos \pi/6} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = z_2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} i \right).$$

Аналогично доказывается, что

$$z_5 = z_1 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} i \right), \quad z_6 = z_3 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} i \right).$$

Так как  $\vec{c}_1 + \vec{c}_2 + \vec{c}_3 = \vec{0}$ , то по свойству (5.39)

$$z_1 + z_2 + z_3 = K(\vec{c}_1 + \vec{c}_2 + \vec{c}_3) = K(\vec{0}) = 0.$$

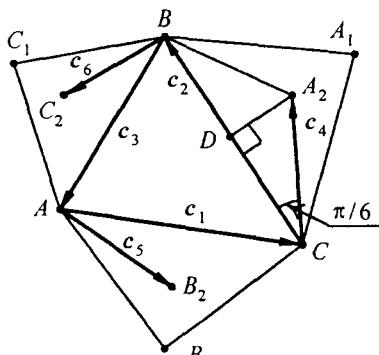


Рис. 5.8

Поскольку  $\vec{B_2A_2} = -c_5 + c_1 + c_4$ ,  $\vec{B_2C_2} = -c_5 - c_3 + c_6$ , то для комплексных чисел  $z_7 = K(\vec{B_2A_2})$  и  $z_8 = K(\vec{B_2C_2})$  имеем:

$$\begin{aligned} z_7 &= -z_5 + z_1 + z_4 = z_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i\right) + z_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}i\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot z_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot z_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot z_1 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot z_2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{\pi}{6}}(z_1 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + z_2), \\ z_8 &= -z_5 - z_3 + z_6 = -z_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}i\right) - z_3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i\right) = \\ &= -z_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}i\right) + (z_1 + z_2)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} z_1 \cdot i + z_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} z_1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} z_2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}(z_1 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + z_2), \\ \frac{z_8}{z_7} &= \frac{1/\sqrt{3} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}(z_1 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + z_2)}{1/\sqrt{3} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}(z_1 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + z_2)} = e^{i\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\vec{B_2A_2} = \vec{V}(z_7)$ ,  $\vec{B_2C_2} = \vec{V}(z_8)$ , то по формулам (5.42), (5.43)

$$\frac{|B_2C_2|}{|B_2A_2|} = \frac{|\vec{B_2C_2}|}{|\vec{B_2A_2}|} = \frac{|z_8|}{|z_7|} = \left| \frac{z_8}{z_7} \right| = 1, \quad A_2 \hat{B}_2 C_2 = \left| \operatorname{Arg} \frac{z_8}{z_7} \right| = \frac{\pi}{3}.$$

Таким образом, треугольник  $A_2B_2C_2$  — равнобедренный с углом при вершине  $\frac{\pi}{3}$ , то есть треугольник  $A_2B_2C_2$  — равносторонний. ▼