ГЛАВА 6. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

§1. Определение и свойства векторного произведения. Условие коллинеарности векторов

Зафиксируем правый ортонормированный базис $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. Пусть $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\boldsymbol{b} = (b_x; b_y; b_z)$ — произвольные векторы. *Векторным произведением* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (в указанном порядке) называется вектор

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right). \qquad (6.1)$$

Из свойств определителей вытекают следующие свойства векторного произведения:

1°. $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] = -[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ (антикоммутативность). (6.2)

□ $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = -[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. ■

2°. *Для любых векторов* $\boldsymbol{a}' = (a'_x; a'_y; a'_z)$, $\boldsymbol{a}'' = (a''_x; a''_y; a''_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x; b_y; b_z)$ *и любых чисел* α *и* β *справедливы равенства*

$$[\alpha\boldsymbol{a}' + \beta\boldsymbol{a}'', \boldsymbol{b}] = \alpha[\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}] + \beta[\boldsymbol{a}'', \boldsymbol{b}], \qquad (6.3)$$
$$[\boldsymbol{b}, \alpha\boldsymbol{a}' + \beta\boldsymbol{a}''] = \alpha[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}'] + \beta[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}''].$$

□ Согласно свойству определителей,

$$[\alpha\boldsymbol{a}' + \beta\boldsymbol{a}'', \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \alpha a'_x + \beta a''_x & \alpha a'_y + \beta a''_y & \alpha a'_z + \beta a''_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$=\alpha\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}+\beta\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a''_x & a''_y & a''_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\alpha\,[\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}]+\beta\,[\boldsymbol{a}'',\boldsymbol{b}],$$

$$[\boldsymbol{b},\alpha\boldsymbol{a}'+\beta\boldsymbol{a}'']=-[\alpha\boldsymbol{a}'+\beta\boldsymbol{a}'',\boldsymbol{b}]=-(\alpha[\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}]+\beta[\boldsymbol{a}'',\boldsymbol{b}])=$$

$$=-(-\alpha[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}']-\beta[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}''])=\alpha[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}']+\beta[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}''].$$

Здесь несколько раз использовано свойство 1°. ■

Пример 1. Докажите, что $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]=\vec{0}$.

▲ Согласно свойству 1°, $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]=-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]$. Поэтому $2[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]=\vec{0}$, $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]=\vec{0}$. ▼

Приведем геометрические свойства векторного произведения двух векторов.

I. *Вектор* $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ *ортогонален как вектору* $\boldsymbol{a}$, *так и вектору* $\boldsymbol{b}$.

□ По формулам (3.31), (6.1), согласно свойству 3° определителей имеем

$$(\boldsymbol{a},[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])=a_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда следует, что $(\boldsymbol{b},[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])=-(\boldsymbol{b},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}])=-0=0$. ■

II. *Длина вектора* $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ *численно равна площади* S *параллелограмма, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$, *т.е.*

$$|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

□ Пусть $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. Тогда

$$S^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\varphi=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\varphi=$$

$$=(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2)-(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)^2.$$

В силу тождества, связанного с тремя определителями,

$$S^2 = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\right)^2 + \left(-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)^2 = |[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]|^2. \blacksquare$$

III. Из определения векторного произведения и признака коллинеарности векторов следует, что *векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда* $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \vec{0}$.

IV. *Если векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *не коллинеарны, то* $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\}$ *— правый базис.*

□ Достаточно доказать, что определитель матрицы перехода от базиса $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ к базису $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\}$ положителен. Пусть

$c_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}$, $c_y = -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}$, $c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$ — координаты вектора $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. Тогда

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = |[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]|^2 > 0,$$

поскольку векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны. ■

Для данных векторов $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *свойствами* I — IV *вектор* $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ *определяется однозначно*: если $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, то согласно свойству III $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \vec{0}$. Если же $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$, то на основании свойства I вектор $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ перпендикулярен плоскости $\mathcal{P}$, в которой векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют базис (этим однозначно с точностью до параллельности определяется прямая, которой вектор $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ параллелен), длина вектора $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ согласно свойству II численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, и направление вектора $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ определяется с помощью свойства IV из условия, что $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\}$ — правый базис. Таким образом, свойства I — IV можно было бы принять за определение векторного произведения. Этому определению удовлетворил бы вектор $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, определяемый формулой (6.1), и только он. Часто так и поступают: векторное произведение определяют с

помощью свойств I — IV, а формулу (6.1) выводят из такого определения и затем используют в вычислениях.

Пример 2. Найдите $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, если в базисе $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ $\boldsymbol{a}=(-1;0;1)$, $\boldsymbol{b}=(2;1;3)$.

▲ По формуле (6.1)

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=(-1;5;-1). \ ▼$$

Пример 3. Пусть $\{\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'\}$ — произвольный правый ортонормированный базис. Докажите, что для любых векторов $\boldsymbol{a}=(a'_x;a'_y;a'_z)$ и $\boldsymbol{b}=$ $=(b'_x;b'_y;b'_z)$, заданных координатами в этом базисе,

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}' \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \end{vmatrix},$$

иначе говоря, *вид правой части формулы* (6.1) *не зависит от выбора правого ортонормированного базиса.*

□ Вектор $[\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}']$ имеет длину, равную 1 (свойство II), ортогонален как $\boldsymbol{i}'$, так и $\boldsymbol{j}'$ (свойство I), причем $\{\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',[\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}']\}$ — правый базис (свойство IV), поэтому вектор $[\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}']$ есть не что иное, как $\boldsymbol{k}'$, т.е. $[\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}']=\boldsymbol{k}'$. Аналогично устанавливается, что $[\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}']=\boldsymbol{i}'$, $[\boldsymbol{k}',\boldsymbol{i}']=\boldsymbol{j}'$. Поскольку $\boldsymbol{a}=a'_x\boldsymbol{i}'+\boldsymbol{a}''$, где $\boldsymbol{a}''=a'_y\boldsymbol{j}'+a'_z\boldsymbol{k}'$, согласно свойству 2°,

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=a'_x[\boldsymbol{i}',\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{a}'',\boldsymbol{b}]=a'_x[\boldsymbol{i}',\boldsymbol{b}]+a'_y[\boldsymbol{j}',\boldsymbol{b}]+a'_z[\boldsymbol{k}',\boldsymbol{b}].$$

Далее, полагая $\boldsymbol{b}''=b'_y\boldsymbol{j}'+b'_z\boldsymbol{k}'$, получим по свойству 2°

$$[\boldsymbol{i}',\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{i}',b'_x\boldsymbol{i}']+[\boldsymbol{i}',\boldsymbol{b}'']=b'_x[\boldsymbol{i}',\boldsymbol{i}']+b'_y[\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}']+b'_z[\boldsymbol{i}',\boldsymbol{k}']=$$
$$=b'_y[\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}']-b'_z[\boldsymbol{k}',\boldsymbol{i}']=b'_y\boldsymbol{k}'-b'_z\boldsymbol{j}'.$$

Аналогично, $[\boldsymbol{j}',\boldsymbol{b}]=-b'_x\boldsymbol{k}'+b'_z\boldsymbol{i}'$, $[\boldsymbol{k}',\boldsymbol{b}]=b'_x\boldsymbol{j}'-b'_y\boldsymbol{i}'$. Следовательно,

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=a'_x(b'_y\boldsymbol{k}'-b'_z\boldsymbol{j}')+a'_y(-b'_x\boldsymbol{k}'+b'_z\boldsymbol{i}')+a'_z(b'_x\boldsymbol{j}'-b'_y\boldsymbol{i}')=$$

$$=\boldsymbol{i}'(a'_yb'_z-a'_zb'_y)-\boldsymbol{j}'(a'_xb'_z-a'_zb'_x)+\boldsymbol{k}'(a'_xb'_y-a'_yb'_x)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}' \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b_x & b_y & b'_z \end{vmatrix}. \ ■$$

Далее в этом параграфе, если не оговорено противное, считаем, что координаты векторов заданы в правом ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ (на плоскости — в базисе $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$), а координаты точек — в соответствующей прямоугольной системе координат $\{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ (на плоскости — $\{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$).

Пример 4. Проверьте, что векторы $\boldsymbol{a} = (1; 0; -1)$, $\boldsymbol{b} = (-1; 1; 0)$, $\boldsymbol{c} = (2; 0; -3)$ не компланарны. Найдите единичный вектор $\boldsymbol{d}$, ортогональный векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ такой, что $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}\} \sim \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$.

▲ Имеем

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Следовательно, векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ не компланарны и $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ — левый базис. Искомый вектор $\boldsymbol{d}$ ортогонален как $\boldsymbol{a}$, так и $\boldsymbol{b}$, поэтому $\boldsymbol{d} \parallel [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Поскольку $|\boldsymbol{d}| = 1$, возможны только два случая: $\boldsymbol{d}_1 = \dfrac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|}$ или $\boldsymbol{d}_2 = -\boldsymbol{d}_1 = -\dfrac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|}$. Согласно свойству IV, базис $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\}$, а следовательно, и одинаково ориентированный с ним базис $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}_1\}$ являются правыми. Так как $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, -\boldsymbol{d}_1\} \approx \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}_1\}$, то $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}_2\}$ — левый базис, т.е. $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}_2\} \sim \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$. Значит, искомый вектор $\boldsymbol{d}$ равен $\boldsymbol{d}_2$. Имеем

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (1; 1; 1),$$

$$|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = \sqrt{3}.$$

Следовательно, $\boldsymbol{d} = (-1/\sqrt{3}; -1/\sqrt{3}; -1/\sqrt{3})$. ▼

Пример 5. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Выразите векторы 1) $[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}]$ и 2) $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/2, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}/2]$ через вектор $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$.

▲ Согласно свойству линейности векторного произведения имеем

1) $[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}]=$

$$=\vec{0}-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]-\vec{0}=-2\boldsymbol{c}.$$

Здесь учтены свойство (6.2) и результат примера 1.

2) Аналогично,

$$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/2, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}/2]=(1/2)[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}/2]+(1/2)[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}/2]=$$
$$=(1/2)[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]-(1/4)[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]+(1/2)[\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}]-(1/4)[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]=$$
$$=(1/2)\boldsymbol{c}-(1/4)(-\boldsymbol{c})=(3/4)\boldsymbol{c}.$$ ▼

Пример 6. Три ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ связаны соотношениями $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]$, $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. Найдите длины этих векторов и углы между ними.

▲ Так как $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$, то $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$. Кроме того, $\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]$, поэтому $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$. Значит, все три вектора попарно ортогональны. Далее, $|\boldsymbol{a}|=$ $=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$, $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$. Перемножая эти соотношения, получаем $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|=1$. Учитывая, что $|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|$, имеем $|\boldsymbol{a}|^2=1$, т.е. $|\boldsymbol{a}|=1$. Аналогично, $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$. Так как $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, то $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ — правый ортонормированный базис. ▼

Пример 7. Докажите, что если три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ попарно не коллинеарны, то условия $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\vec{0}$ эквивалентны.

□ Если $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\vec{0}$, то, умножая это равенство векторно на $\boldsymbol{a}$, получаем $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]-[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]=\vec{0}$. Отсюда $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]$. Если умножить равенство не на $\boldsymbol{a}$, а на $\boldsymbol{b}$, то получим $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$.

Обратно: если $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$, т.е. $[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}]=\vec{0}$, то согласно свойству III векторного произведения $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\parallel\boldsymbol{b}$, т.е. существует такое число λ, что $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{b}=\vec{0}$. Выражая отсюда $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{c}-\lambda\boldsymbol{b}$ и подставляя в равенство

$[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]$, получаем $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\lambda[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$, т.е. $(1-\lambda)[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\vec{0}$. Векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не коллинеарны, т.е. $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\neq\vec{0}$. Следовательно,

$$\lambda=1 \text{ и } \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\vec{0}. \blacksquare$$

Пример 8. Даны разложения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ по базису $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$: $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{e}_1+a_y\boldsymbol{e}_2+a_z\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{e}_1+b_y\boldsymbol{e}_2+b_z\boldsymbol{e}_3$. Разложите вектор $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ по векторам $\boldsymbol{f}_1=[\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$, $\boldsymbol{f}_2=[\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1]$, $\boldsymbol{f}_3=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$.

▲ Согласно свойству линейности векторного произведения, $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=$ $=[a_x\boldsymbol{e}_1+a_y\boldsymbol{e}_2+a_z\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{b}]=a_x[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{b}]+a_y[\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}]+a_z[\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{b}]$. Аналогично,

$$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{e}_1,b_x\boldsymbol{e}_1+b_y\boldsymbol{e}_2+b_z\boldsymbol{e}_3]=$$
$$=b_x[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1]+b_y[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]+b_z[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3]=b_y\boldsymbol{f}_3-b_z\boldsymbol{f}_2$$

(здесь учтено равенство $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1]=\vec{0}$). Так же проверяется, что $[\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}]=$ $=b_z\boldsymbol{f}_1-b_x\boldsymbol{f}_3$, $[\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{b}]=b_x\boldsymbol{f}_2-b_y\boldsymbol{f}_1$. Следовательно,

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=a_x(b_y\boldsymbol{f}_3-b_z\boldsymbol{f}_2)+a_y(b_z\boldsymbol{f}_1-b_x\boldsymbol{f}_3)+a_z(b_x\boldsymbol{f}_2-b_y\boldsymbol{f}_1)=$$
$$=\boldsymbol{f}_1\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-\boldsymbol{f}_2\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+\boldsymbol{f}_3\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \boldsymbol{f}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \blacktriangledown \quad (6.4)$$

§2. Площадь параллелограмма, треугольника, четырехугольника

Пусть $\mathcal{P}$ — фиксированная плоскость в пространстве, $\{\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}'\}$ — ортонормированный (не обязательно правый) базис в плоскости $\mathcal{P}$, $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}'+a_y\boldsymbol{j}'$ и $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}'+b_y\boldsymbol{j}'$ — произвольные векторы, параллельные плоскости $\mathcal{P}$. Положим $\boldsymbol{k}'=[\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}']$. Тогда $\{\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'\}$ — правый ортонормированный базис в пространстве (свойство IV), в этом базисе

$$\boldsymbol{a}=(a_x;a_y;0),\ \boldsymbol{b}=(b_x;b_y;0),$$